



Titre: Commande à seuils critiques de la production dans un atelier de fabrication avec machines en tandem non fiables
Title:

Auteur: Jean Mbihi
Author:

Date: 1999

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Mbihi, J. (1999). Commande à seuils critiques de la production dans un atelier de fabrication avec machines en tandem non fiables [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8649/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8649/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche:
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**COMMANDE À SEUILS CRITIQUES DE LA PRODUCTION
DANS UN ATELIER DE FABRICATION AVEC
MACHINES EN TANDEM NON FIABLES**

Jean MBIHI

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

**THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)**

Juin 1999



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-46637-X

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

**COMMANDE À SEUILS CRITIQUES DE LA PRODUCTION DANS
UN ATELIER DE FABRICATION AVEC
MACHINES EN TANDEM NON FIABLES**

présentée par : MBIHL Jean

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

- M. EL-KÉBIR Boukas, Ph.D., Président
- M. MALHAMÉ Roland, Ph. D., membre et directeur de recherche
- M. CONAN Jean, Ph.D., membre
- M. GERSHWIN B. Stanley, Ph.D., membre et examinateur externe

DÉDICACE

A la mémoire de ma mère *Manzeu Jeanne*

A mon épouse *Tsafack Pélagie Marthe*

A mes *frères et sœurs*

REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser mes très sincères et profonds remerciements à:

- Mon directeur de recherche, le professeur *Roland P. Malhamé*. Sa clairvoyance, son sens élevé de rigueur scientifique, sa longue et très riche expérience, sa disponibilité totale, ainsi que ses précieux conseils et remarques m'ont été extrêmement utiles tout au long de la préparation de cette thèse;
- L'Agence Canadienne pour le Développement de la Coopération Internationale (*A.C.D.I.*), pour le soutien financier qu'elle m'a accordé dans le cadre de mes études doctorales;
- Professeur *E-K. Boukas* qui m'avait permis, lors de son *cours d'ANALYSE DES SYSTÈMES DE PRODUCTION FLEXIBLE (MEC 6509)*, d'appréhender la complexité, la richesse voire l'intérêt des problèmes d'optimisation de la production pour ateliers de fabrication constitués de machines non fiables;
- Tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de cette thèse.

RÉSUMÉ

Les ateliers de fabrication considérés dans cette thèse, sont constitués de $M \geq 2$ machines en tandem, produisant un seul type de pièces. Les machines sont sujettes à des pannes et réparations de durée à distribution exponentielle, et le taux de demande des produits finis est supposé constant. Notre travail se situe au niveau moyen de la décomposition hiérarchisée des ateliers, le but visé étant de développer, dans la classe des politiques décentralisées de production, à seuils critiques, une méthodologie adéquate de commande sous-optimale du flux de production pour les configurations en tandem. Partant d'un modèle fluide des processus de production en tandem, le problème d'optimisation du flux est formulé comme celui de la recherche de seuils critiques dans une structure de commande décentralisée, qui puissent minimiser une mesure combinée des coûts d'inventaire et de retard de livraison.

Notre méthodologie d'optimisation est fondée sur trois stratégies d'approximation: le principe de *découplage des machines*, le principe de *moyennage de la demande* et la technique de *Markovianisation* des processus stochastiques de disponibilité des encours. Le principe de découplage des machines stipule que chaque machine (sauf la machine en tête desservie par un fournisseur parfaitement fiable) perçoit la source des encours en amont, comme un fournisseur non fiable, alors que le processus de demande en aval (à l'exception du processus de demande terminale à taux constant) est perçu comme un client stochastique. Ces deux processus sont alors considérés comme *indépendants de l'état d'opération de la machine en question*. Ainsi, l'étude d'un système couplé de M machines en tandem, se ramène à celle de M sous-systèmes stochastiques mono-machines découplés. Le principe de moyennage de la demande stipule que du point de

vue du calcul des niveaux moyens d'inventaire sous les lois de commande décentralisées, à seuils critiques, le taux de demande stochastique associé à chaque machine, peut être *substitué par sa moyenne statistique*, qui est égale au taux constant des produits finis (contrainte d'ergodicité). Par ailleurs, la markovianisation des processus stochastiques d'encours est basée sur la *théorie des temps de premier passage*. Partant de nos deux principes d'approximation, et des schémas markovianisés des encours, les modèles Markoviens approximatifs des machines équivalentes découplées sont construits, et les coûts de production associés sont établis *analytiquement* en fonction des seuils critiques. A ce stade, nous trouvons le seuil critique terminal qui minimise les coûts combinés de stockage des produits finis et de retard de livraison, et ce pour un choix arbitraire des autres $M-1$ seuils critiques en amont. Nous optimisons alors le coût global de production en tandem dans l'espace de ces $M-1$ seuils critiques. Pour des raisons de commodité, nos calculs sont faits dans l'espace normalisé des *coefficients de disponibilité* (probabilité de disponibilité) des encours. Une fois que les coefficients de disponibilité optimaux sont trouvés, les seuils critiques optimaux correspondants sont obtenus par un calcul direct. Finalement, une procédure optimale d'initialisation bien établie, permet d'accélérer la convergence de notre technique de recherche de l'optimum. Tel est le principe opérationnel de nos schémas d'optimisation hiérarchisés, développés aux chapitres 2 (pour $M=2$ machines en tandem) et 3 (pour $M>2$ machines en tandem) de cette thèse.

Au chapitre 2, nous nous concentrons sur le cas d'un atelier constitué de $M=2$ machines en tandem, produisant un seul type de pièces. L'article présenté en Annexe I et intitulé "*Optimization of a class of decentralized hedging policies in a stochastic two-machine flow shop*" constitue la référence principale de ce chapitre. Les résultats analytiques disponibles pour ateliers rudimentaires mono-pièces et mono-machines sont passés en revue, et les fondements de notre méthodologie d'optimisation sont

développés en détail. Tous nos développements s'intègrent dans notre schéma de base d'optimisation hiérarchisé qui s'exécute presque instantanément dans un environnement de calcul inférieur au standard actuel. La comparaison des performances prédites et celles estimées par simulations de Monte-Carlo pour un large échantillon de systèmes, indique que notre principe d'approximation par moyennage de la demande s'avère hautement précis. Par ailleurs, les *coefficients de variation* associés au temps de premier retour des encours à zéro, sont calculés analytiquement, puis utilisés comme indice de qualité des modèles markoviens approximatifs pour machines équivalentes isolées.

Le chapitre 3 est une généralisation de nos développements du chapitre deux au cas de $M > 2$ machines en tandem. L'article intitulé (Annexe II) "*Decentralized hedging production control for M unreliable machines in single part-type manufacturing systems*" constitue la référence principale de ce chapitre. Notre étude révèle qu'après découplage approximatif des machines, moyennage des processus de demande, et markovianisation des processus stochastiques d'encours, la construction de la version généralisée de notre schéma d'optimisation hiérarchisé, ne requiert que *trois blocs* analytiques de construction. Comme implication, la méthodologie d'optimisation proposée, permet de surmonter la complexité liée à l'augmentation du nombre de machines en tandem, qui du point de vue du calcul du coût pour un choix donné de seuils critiques croît linéairement avec le nombre de machines. Nous avons aussi développé un simulateur généralisé de Monte-Carlo en vue de valider nos résultats. Les résultats obtenus avec trois machines en tandem et pour un vaste échantillon de paramètres, indiquent que notre approche d'optimisation hiérarchisée s'exécute très rapidement, tout en offrant des performances acceptables au niveau de la précision.

Au chapitre 4, les propriétés des lois de production à seuils critiques décentralisés sont étudiées à l'aide de nos schémas d'optimisation hiérarchisés tels que développés

aux chapitres 2 et 3. Une campagne de simulations nous a conduit aux conclusions suivantes: la haute qualité du principe d'approximation par moyennage de la demande se maintient lors des variations du taux de demande des produits finis (à condition que le système reste ergodique); ce même principe s'avère aussi robuste lors de la variation des paramètres statistiques des machines opérant en aval d'une station d'observation; l'optimum recherché apparaît être essentiellement une fonction de la capacité minimale de production dans la chaîne, alors que le coefficient de pénalisation des encours en tête s'avère être un *paramètre très influent quant aux caractéristiques de convexité* du coût global de production en tandem. Une étude mathématique de telles propriétés pourra se révéler d'intérêt à l'avenir. Enfin, nos résultats numériques indiquent que les performances obtenues à l'intérieur de la classe sous-optimale des lois décentralisées à seuils critiques, se comparent souvent bien à celles obtenues par la résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Le schéma d'optimisation proposé dans cette thèse pour machines en tandem est caractérisé par un compromis intéressant entre simplicité de compréhension et d'implantation, et qualité. Il est en effet aisé à comprendre, très rapide lors de l'exécution, très prometteur pour des problèmes de grande taille, facile à implanter en temps réel, et satisfaisant du point de vue des performances. En particulier, notre principe de moyennage de la demande s'avère être une excellente approximation et pourra potentiellement se révéler très utile aussi bien dans l'analyse des réseaux de production mono et multi-pièces plus généraux, que dans d'autres processus de recherche opérationnelle faisant intervenir des réseaux. Les nombreux atouts de notre schéma d'optimisation hiérarchisé, en font donc un nouveau candidat que nous pressentons très compétitif quant à la gestion en temps réel des flux de production, dans les systèmes stochastiques de production en tandem.

ABSTRACT

The manufacturing systems considered in this thesis consist of $M \geq 2$ tandem machines, producing one part-type. Machines are subjected to random failures and repairs with exponential duration, and the demand rate of final goods is assumed to be a constant. Our work is focused on the medium level of the decomposition hierarchy associated with the manufacturing activities i.e. that of flow control, the target goal being to develop within the class of decentralized hedging production controls, an adequate methodology for a sub-optimal production control of unreliable tandem machines. Based on a fluid model of the tandem production system, the flow rate optimization problem is formulated within the class of decentralized hedging production controls, as a parameter optimization problem aimed at minimizing a combined measure of inventory and backlog average costs.

Our optimization methodology is founded on three approximation strategies: the machine *decoupling* approximation, the *demand averaging* principle and the *Markovianization* technique of availability processes associated with the work-in-process (WIP). The machine decoupling approximation stipulates that while the upstream source of WIP associated with each machine (except the head of the line machine which has a perfectly reliable supply) is viewed as an unreliable supply process, its downstream source of demand is viewed as a stochastic demand process (except the front-end demand process with a constant rate). These two processes are then assumed *independent of the operational state of the machine* under consideration. Thus, the study of a coupled system consisting of M tandem machines, is reduced to that of M stochastic decoupled subsystems. The demand averaging principle stipulates that insofar as the computation of average WIP levels under decentralized hedging

policies, the stochastic demand rate process associated with each machine, can be *substituted by its long term expected value*, which is equal to the constant demand rate for finished goods (ergodicity constraint). In addition, the Markovianization of the WIP availability process relies on *first return time theory*. Using both approximation principles and the approximate Markovianization of WIP availability processes, Markovian models of equivalent decoupled single machines are built, and the associated production costs are computed analytically in terms of hedging levels. At this stage, we compute the optimal critical level of inventory of finite products required to minimize inventory and backlog costs in terms of the arbitrary $M-1$ upstream hedging points. Subsequently, the overall tandem production cost is optimized within the remaining $M-1$ dimensional hedging space. For ease of presentation, optimization computations are conducted in the availability coefficients space of WIP (probability of non zero), in which case the optimal hedging points are derived from optimal availability coefficients by means of a straightforward computation. Finally, an effective initialization procedure is established in order to improve the convergence of our proposed optimization procedure. This is the operational principle of our hierarchical optimization scheme developed in chapters 2 (for $M=2$ tandem machines) and 3 (for $M>2$ machines en tandem) of the thesis.

In chapter 2, the case of a two-machine flow shop producing one part-type is investigated. The article untitled “ Optimization of a Class of Decentralized Hedging Policies in a Stochastic Two-Machine Flow Shop” (see Appendix I) is the central reference associated with this chapter. Available analytical results for basic one part-type one machine production systems are recalled, and the foundations of our optimization methodology are discussed in some detail. All our developments are integrated in a basic hierarchical optimization scheme, which runs almost instantaneously using a currently substandard computational environment. Predicted performances and those

obtained from Monte Carlo simulation techniques are compared for a wide set of sample systems, and the results show our demand averaging principle appears to be a quite accurate approximation. In addition, the coefficients of variation associated with the availability coefficients of the work-in-process are computed analytically, and used as an indicator for the quality of our Markovianization of the availability process.

In chapter 3, the developments of chapter 2 regarding a two-machine flow shop are generalized to the case of $M > 2$ tandem machines. The article “*Decentralized Hedging Production Control for M unreliable machines in Single Part-Type Manufacturing Systems*” (see appendix II) is the main reference of this chapter. Our analysis shows that following the machine decoupling, and demand averaging approximations as well as Markovianization of WIP availability processes, *only three types* of building blocs are required for the construction of the generalized version of our hierarchical optimization scheme. As a consequence, the proposed optimization scheme permits to overcome the complexity due to an increase in the number of tandem machines, which as far as computation of incurred production costs goes, for a given choice of hedging levels, grows linearly with the number of machines. Finally, a generalized Monte Carlo simulator developed and used to validate our approximations based results is presented. The results obtained for three-machine systems and a wide set of parameters, indicate that our hierarchical optimization scheme runs very quickly and provides good performance.

In chapter 4, the properties of decentralized hedging production controls are investigated with the help of the optimization schemes developed in chapters 2 and 3. A number of simulations lead to the following observations: the high quality of the demand averaging principle is maintained during variations of demand rate of finished goods (provided that the system remain ergodic); also, the approximations principle

appears to be robust against variations of the statistical parameters associated with downstream machines as viewed from an upstream workstation; The optimum performance appears to be essentially a function of the machine with least capacity, all other machine characteristics being identical, while the size of the penalty coefficient associated with the head of the line machine WIP have a *significant impact on the convexity characteristics* of the overall production cost. It would be interesting to further investigate mathematically out a mathematical study of such properties. Finally, we note that when compared to solutions derived from optimal control theory via a numerical treatment of Hamilton-jacobi-Bellman equations, performance can come quite close to the optimal one.

The optimization scheme proposed in the thesis for tandem machines is characterized by an attractive trade-off between ease of understanding and implementability on the one hand, and performance on the other hand. Indeed, it is reasonably easy to understand, runs very quickly, appears to hold great promise for high size problems, and thus would be easy to implement in a real time production environment with good performance. Also, it is worthwhile noting that demand averaging principle appears to be a uniformly excellent approximation, which could potentially lead to great simplifications of analysis in more general manufacturing networks, and other types of networks encountered in operations research. Because of the numerous advantages cited, our hierarchical optimization scheme appears to be a competitive candidate for real time production control in stochastic manufacturing systems.

TABLE DES MATIERES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	x
TABLE DES MATIÈRES	xiv
LISTE DES TABLEAUX	xvii
LISTE DES FIGURES	xviii
LISTE DES ANNEXES	xx
LISTE DES SYMBOLES	xxi

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1.1 Éléments de gestion optimale de la production dans les ateliers de fabrication ...	2
1.2 Vision de décomposition hiérarchisée des ateliers de fabrication	4
1.3 Particularités des processus de production en tandem	6
1.4 État de l'art sur la gestion sous-optimale de la production en tandem	7
1.5 Problématique de la thèse	10
1.6 Objectifs et méthodologie	12

CHAPITRE 2

OPTIMISATION D'UNE CLASSE DE POLITIQUES DÉCENTRALISÉES DE PRODUCTION, À SEUILS CRITIQUES, POUR DEUX MACHINES NON FIABLES EN TANDEM	16
2.1 Système de fabrication en tandem: cas de deux machines	16

2.2	Principaux résultats disponibles pour ateliers mono-machines et mono-pièces	18
2.3	Fondements de l'approche d'optimisation proposée	22
2.4	Schéma d'optimisation hiérarchisé proposé	24
2.5	Applications et résultats	25
2.6	Conclusion	27

CHAPITRE 3

OPTIMISATION D'UNE CLASSE DE POLITIQUES DÉCENTRALISÉES DE LA PRODUCTION, À SEUILS CRITIQUES, POUR M MACHINES

EN TANDEM	30
3.1 Système de production en tandem considéré	31
3.2 Principe de découplage approximatif des M machines	32
3.3 Principe d'approximation par moyennage de la demande	33
3.4 Trois modèles de machines	33
3.5 Schéma général d'optimisation hiérarchisé pour machines en tandem	35
3.6 Applications et résultats	35
3.7 Conclusion	38

CHAPITRE 4

EXPLORATION NUMÉRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES LOIS DE COMMANDE DÉCENTRALISÉES DE LA PRODUCTION À SEUILS CRITIQUES

CRITIQUES	41
4.1 Robustesse en performance du principe d'approximation par moyennage de la demande lors des variations de d	41
4.2 Robustesse en performance du principe d'approximation par moyennage de la demande lors des variations des paramètres statistiques des machines	

en aval	43
4.3 Influence des valeurs relatives des coûts d'inventaires sur les caractéristiques de la fonction coût global	45
4.4 Invariance de la solution optimale pour $k_i \geq k_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, M-1$)	46
4.5 Allure des performances optimales en fonction du taux de retour de réparation des machines	57
4.6 Allure des performances optimales en fonction de c_1	57
4.7 Sous-optimalité des lois de commande décentralisées à seuils critiques pour machines en tandem	58
4.8 Conclusion	70
 CHAPITRE 5	
CONCLUSION GÉNÉRALE.	71
Contributions originales	71
Nouvelles perspectives	73
 RÉFÉRENCES	75
 ANNEXES	87
ANNEXE I: "Optimization of a Class of Decentralized Hedging Policies in a Stochastic Two-Machine Flow Shop"	88
ANNEXE II: "Decentralized Hedging Production Control for M Tandem Machines in Stochastic Manufacturing Systems"	138

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1: Exemples de systèmes $S=(M_1, M_2)$ considérés pour la comparaison des performances optimales et sous-optimales	64
Tableau 4.2: Résumé des résultats de comparaison des performances optimales et sous-optimales	64

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Schéma simplifié d'un atelier de fabrication moderne	1
Figure 2.1: Trajectoires des états $\xi(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sur un horizon court	28
Figure 2.2: Convergence des coûts moyens $J_1(\xi, t)$ et $J_2(\xi, t)$	29
Figure 3.1: Exemple de réalisation de $\xi(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$	39
Figure 3.2: Convergence des coûts moyens de production J_1 , J_2 et J_3 pour les cinq réalisations enregistrées dans chaque cas	40
Figure 4.1: Maintien de la qualité du principe d'approximation par moyennage de la demande lors des variations du taux de demande d	47
Figure 4.2: Robustesse en performance du principe de moyennage de la demande lors de variations des paramètres statistiques des machines en aval (cas du système (M_1, M_2))	48
Figure 4.3: Robustesse en performance du principe de moyennage de la demande lors de variations des paramètres statistiques des machines en aval (cas du système (M_1, M_2, M_3))	49
Figure 4.4: Effet du paramètre c_1 sur la convexité de $J(a)$: cas du système (M_1, M_2)	50
Figure 4.5: Effet du paramètre c_1 sur la convexité de $J(a)$: cas du système (M_1, M_2, M_3)	51
Figure 4.6: Invariance de l'optimum pour $k=k_1$ (cas du système (M_1, M_2))	52
Figure 4.7: Invariance de l'optimum pour $k=k_1$ et $k=k_2$ (cas du système (M_1, M_2, M_3))	53
Figure 4.8: Allure des performances optimales lorsque le taux de réparation des machines varie	54
Figure 4.9: Allure des caractéristiques optimales en fonction de c_1 :	

cas du système (M_1, M_2) avec $c_2^*=2$ et $c_2^*=10$	55
Figure 4.10: Allure des caractéristiques optimales en fonction de c_1 :	
cas du système (M_1, M_2) avec $c_2^*=c_2^*=2$	56
Figure 4.11: Comparaison des coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$: cas 1	66
Figure 4.12: Comparaison des coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$: cas 2	67
Figure 4.13: Comparaison des coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$: cas 3	68
Figure 4.14: Comparaison des coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$: cas 4	69

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I

“Optimization of a Class of Decentralized Hedging Policies in a Stochastic Two-Machine Flow Shop”	88
---	----

ANNEXE II

“Decentralized Hedging Production Control for M unreliable Tandem Machines in Stochastic Manufacturing Systems ”	138
--	-----

LISTE DES SYMBOLES

- M : Nombre de machines;
- n : Nombre d'événements (pannes, réparations, pénuries, etc) survenus dans l'horizon de simulation du système en tandem;
- i : Numéro d'ordre d'une machine dans la séquence $(M_1, M_2, \dots, M_i, M_{i+1}, \dots, M_M)$, $i=1, 2, \dots, M$;
- M_i : Machine de rang i , $i=1, 2, \dots, M$;
- t : Temps;
- r_i : Taux de réparation de la machine M_i ;
- p_i : Taux de pannes de la machines M_i ;
- k_i : Capacité maximale de la machine M_i ;
- x_i : Niveau continu (variable d'état) de l'inventaire associé à la machines M_i ;
- x : Vecteur d'état $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M)^T$ du système;
- u_i : taux de production de la machine M_i ;
- u : vecteur de taux de production $(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_M)^T :=$ vecteur de commande;
- π : politique de production;
- ξ_i : État binaire de la machine M_i avec $\xi_i := 1$ si M_i opérationnelle et $\xi_i := 0$ si M_i est en panne;
- α_i : identique à ξ_i ;
- ξ : Espace d'état discret de la chaîne de Markov associée au processus binaire conjoint $(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_M)^T$;
- α : identique à ξ ;
- c_i : Coefficient de pénalisation de x_i , pour $i=1, 2, \dots, M-1$;
- c_M^+ : Coefficient de pénalisation de x_M si $x_M > 0$;
- c_M^- : Coefficient de pénalisation de x_M si $x_M < 0$ (retard de livraison);

- Z_i : Seuil critique associé à la machine M_i ;
 Z_i^* : Seuil critique optimal pour la machine M_i ;
 a_i : Coefficient de disponibilité des encours associés à x_i ;
 a_i^j : vecteur $(a_i \ a_{i+1} \ \dots \ a_j)^T$ avec $i \leq j$. En particulier, on a $a_i^i := a_i$;
 $J_i(\cdot)$: Coût moyen de production associé à la machine M_i ;
 $J(\cdot)$: Coût total moyen de production $J_1(\cdot) + J_2(\cdot) + \dots + J_M(\cdot)$;
 J_i^* : Coût optimal de production associé à la machine M_i , $i=1, 2, \dots, M-1$;
 J_M^* : Coût optimal associé à la machine M_M pour a_1, \dots, a_{M-1} fixés (ou Z_1, \dots, Z_{M-1} fixés);
 J^* : Coût total de production $J_1(\cdot) + J_2(\cdot) + \dots + J_M^*(\cdot)$;
 J^{**} : Coût optimal total $J_1^*(\cdot) + J_2^*(\cdot) + \dots + J_M^{**}(\cdot)$;
 $V(x, \xi)$: Fonction valeur pour la condition initiale $(x, \xi) \times \{1, 2, \dots, 2^M$;
 $V_\rho(x, \xi)$: Fonction valeur pour la condition initiale $(x, \xi) \times \{1, 2, \dots, 2^M$ et un facteur d'actualisation ρ ;
 V_ρ^* : Valeur optimale de $V_\rho(x, \xi)$;
 J_0^* : Limite asymptotique de la quantité ρV_ρ^* lorsque ρ tend vers zéro;
 h_i : Pas de discretisation de l'espace d'état suivant la direction de x_i ;
 G : Grille de l'espace d'état x ;

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les ateliers modernes de fabrication des produits manufacturiers sont constitués d'équipements de technologie avancée (Dupont-Gathermand, 1984; Warnecke, H. J. et Steinhilper, 1988). On y rencontre des machines à commande numérique, des palettes à outils automatisées, des zones de stockage des produits finis et semi-finis, des systèmes de transport par convoyeurs motorisés ou par robots mobiles, des sources d'énergie de puissance, des réseaux d'automates programmables industriels et d'ordinateurs permettant de synchroniser et de superviser automatiquement les activités de l'atelier. Notons que dans un atelier de fabrication flexible, les machines peuvent être rapidement reconfigurées en vue de réaliser différentes tâches d'usinage.

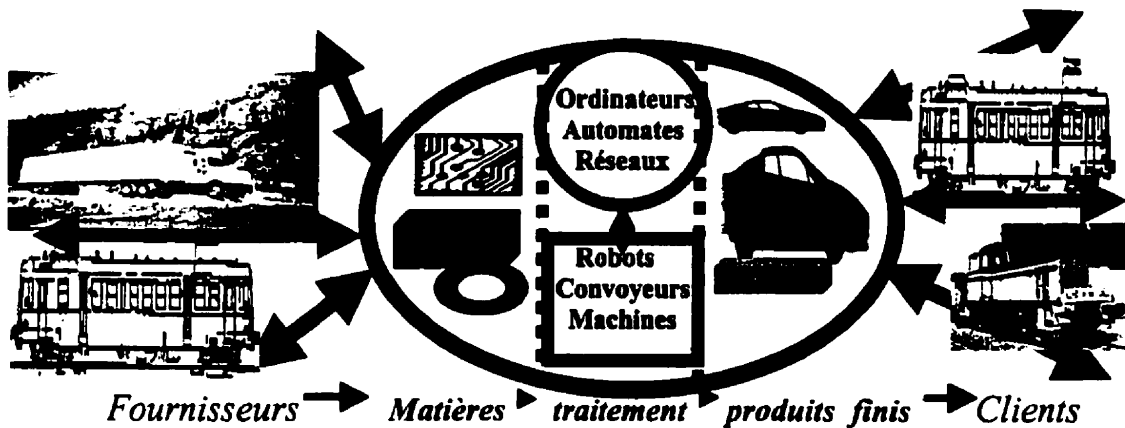


Figure 1.1: Schéma simplifié d'un atelier de fabrication moderne

Du point de vue opérationnel, un atelier de fabrication moderne peut être représenté par le schéma simplifié de la figure 1.1. Ce schéma correspond à celui d'un système dynamique ayant pour variables d'entrée les débits énormes de produits en circulation à partir des postes d'approvisionnement en matières premières, pour variables de sortie les quantités des produits finis destinés à une clientèle souvent exigeante, et pour états

l'identité des machines en service et les quantités éventuelles des encours et produits finis.

Les données constitutionnelles et opérationnelles précédentes montrent que la conception, l'installation et le maintien en vie d'un atelier de fabrication moderne nécessite un investissement extrêmement important. Il est donc vital d'optimiser la gestion de la production, afin de maximiser la rentabilité des équipements installés, ainsi que de maintenir autant que possible la continuité de service des clients, en dépit des pannes éventuelles des machines et autres aléas de l'environnement de fabrication.

Dans cette introduction générale, nous présenterons d'abord les trois éléments fondamentaux de gestion optimale de la production dans les ateliers de fabrication modernes. Nous rappellerons ensuite les aspects essentiels d'une vision fondée sur la décomposition hiérarchisée des activités au sein de ces ateliers. Par ailleurs, les particularités des systèmes de fabrication en tandem considérés dans cette thèse seront présentées, ainsi qu'une revue de l'état de l'art sur la gestion optimale de la production en tandem. Cette revue de l'état de l'art débouchera sur la problématique de notre recherche. Enfin, nous présenterons les objectifs de recherche ainsi que la méthodologie retenus dans le cadre de cette thèse.

1.1 Éléments de gestion optimale de la production dans les ateliers de fabrication

En général, l'optimisation de la production dans un atelier de fabrication requiert trois éléments déterminants: un modèle de représentation de l'atelier, une classe définie de politiques de production, et un critère de performance approprié.

Les modèles de représentation qui ont marqué la littérature des systèmes de fabrication reposent sur l'utilisation individuelle ou combinée de plusieurs approches

dont les principales sont: les réseaux de Pétri (Dubois et stecke, 1982), les files d'attente (Buzacott et Shantikumar, 1993), l'intelligence artificielle (Saad, Kawamura et Biswas, 1997), les logiciels de simulation (Pritsker, 1995; Kenne, Gharbi et Boukas, 1997), et la théorie de la commande optimale (Olsder et Suri, 1980). Beaucoup de travaux ont déjà été publiés sur l'étude comparative de ces multiples outils de modélisation des ateliers de fabrication (Gershwin, Hildebrant, Suri et Mitter, 1986; Maison et Gershwin, 1988; Rodammer et white, 1988; Buzacott et Shanthikumar, 1986; Reisman, Kumar, Motwani et Cheng, 1997; et Gershwin, 1997). Bien que chaque type de modèle disponible pour ateliers de fabrication présente des avantages et des lacunes spécifiques, on constate cependant qu'au cours des dix neuf dernières années, l'approche de modélisation basée sur la théorie de commande par retour d'état (Olsder et Suri, 1980), est devenue graduellement très attractive et compétitive.

Les classes de politiques de production disponibles ont aussi été au centre de nombreux travaux (Panwalkar et Iskander, 1977; Graves, 1981; Akella, Choong et Gershwin, 1984; Veatch et Wein, 1994; Sethi et Zhang, 1994; Bonvik, 1997; et Gerhwin, 1997). Les termes *Juste-à-temps*, *Kanban*, *Conwip*, *stocks de base*, *seuils critiques*, et *réseaux de jetons* couramment rencontrés dans la littérature récente des systèmes manufacturiers, désignent des exemples typiques de politiques de production existantes. En particulier, la politique de production à *seuils critiques* (Kimemia et Gerhwin, 1983; Akella, Choong et Gershwin, 1984; Gershwin, Akella et Choong, 1985) qui sera étendue dans cette thèse aux systèmes de fabrication en tandem, a suscité de nombreux axes de recherche au cours des dix dernières années. Plusieurs travaux ont été publiés sur les conditions d'optimalité de cette classe de politique de production (Akella et Kumar, 1986; Bielecki et kumar, 1988; Hu, Valiki et Yu, 1994), et sur les propriétés de renouvellement Markovien (Malhamé et Boukas, 1991) qui en résultent. Les études plus poussées permettant de mieux comprendre d'autres propriétés de base des lois de production de type seuils critiques ont également été publiées

(Malhamé et Boukas, 1991; Hu et Xiang, 1993 et 1995; Perkins et Srikant, 1995). Par ailleurs, les techniques de recherche des seuils critiques et de calcul des performances associées ont été au centre de plusieurs travaux (Sharifnia, 1988; Algoet, 1989; Glasserman, 1995; Camaranis et Liberopoulos, 1992; Liberopoulos et camaranis, 1994; Srinivassan et Dallery, 1994, Sharifnia et Camaranis, 1991; Perkins et Srikant, 1995; El-Férik, Malhamé et Boukas, 1996). Au cours de ces dernières années, le problème d'ordonnancement des seuils critiques pour une machine multi-états (avec plusieurs états pour lesquels la demande peut être satisfaite) a retenu l'attention de certains chercheurs (Liberopoulos et Hu, 1995; Yu et Song, 1999; Huang, Hu et Vakili, 1998).

Le critère de performance utilisé dans les ateliers de fabrication peut être défini de plusieurs manières selon les objectifs recherchés. Cependant, sous l'angle de la commande optimale du flux de production, le critère de performance le plus fréquemment utilisé est le coût total moyen de stockage des inventaires et de retards de livraison dus aux pénuries éventuelles des stocks. Partant d'un modèle de connaissance approprié, d'une classe de politiques de production et d'un critère, le problème global de gestion du flux de production dans un atelier est en général assez facile à formuler. Cependant, compte tenu des multiples événements et aléas (pannes des machines, réparations aléatoires, pénurie de stocks, fluctuations de la demande, etc ...) qui ponctuent le processus de fabrication sur des échelles de temps différentes, le problème global de gestion de la production demeure très complexe, d'où l'intérêt d'une vision fondée sur la décomposition hiérarchisée de l'atelier.

1.2 Vision de décomposition hiérarchisée des ateliers de fabrication

Afin de faciliter la compréhension et l'analyse des ateliers de fabrication, trois niveaux de décomposition hiérarchisée ont été définis (Kimemia et Gershwin, 1983), et à chaque niveau correspond une classe de problèmes spécifiques à résoudre sur un

horizon de temps approprié. Le niveau le plus élevé de la hiérarchie est celui de planification sur un horizon suffisamment long (par exemple un à deux ans), niveau pour lequel le caractère granulaire de la production peut être ignoré, auquel cas un modèle fluide se prête bien à la représentation de l'atelier. L'objectif visé alors est de trouver, à partir d'une mesure combinée des paramètres de fiabilité et des capacités des machines, les consignes de fabrication fortement agrégées dont les taux moyens prévisionnels des demandes de produits finis à satisfaire à long terme. Le niveau moyen de la hiérarchie est celui de commande du flux de production sur un horizon de temps moyen (plusieurs mois à un an par exemple), l'objectif visé étant de déterminer, à partir d'un modèle fluide du processus de production et des contraintes issues du niveau supérieur (demandes à satisfaire), les taux de production moyens à court terme requis pour chaque type de pièces et chaque état d'opération de l'atelier. À ce stade, les détails d'ordonnancement, de routage, des instants et des dates d'usinage des pièces sont ignorés. Également, les durées de configuration des machines pour diverses tâches sont considérées négligeables. Finalement, le niveau le plus bas de la hiérarchie correspond à la gestion horaire, voire quotidienne, des opérations (en tenant compte de la contrainte issue du niveau moyen (taux de production)), à partir des états observés des machines, des quantités discrètes de pièces, et des temps de configuration des machines. C'est à ce niveau que les ordinateurs et les automates programmables disponibles pour la commande en temps réel, supervisent automatiquement les ressources de production via le réseau de communications industriel en place, en vue de satisfaire les taux de production requis.

Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur le niveau moyen de la décomposition hiérarchisée des systèmes de fabrication en tandem. Cette classe de systèmes de production présentent certaines particularités qu'il convient de mentionner.

1.3 Particularités des processus de production en tandem

Les ateliers de fabrication considérés dans cette thèse sont constitués des cellules de travail non fiables, organisées en tandem, et pourvues des zones de stockage des produits finis et semi-finis. Les exemples typiques de ce type d'ateliers sont rencontrés dans l'industrie automobile (Bonvik, 1996), dans les usines de fabrication des circuits intégrés (Lou et Kager, 1989), et dans les entreprises de montage ou d'assemblage robotisé des sous-ensembles électroniques (Gershwin, Akella et Choong, 1985). Dans les systèmes de fabrication en tandem, chaque machine joue simultanément le rôle de client et de fournisseur des encours. Tant qu'elle dispose en amont des encours à traiter, elle est découplée des machines voisines. Cependant, lors des phases de pénurie éventuelles des encours à traiter, cette propriété de découplage est systématiquement détériorée. L'origine de la pénurie peut se situer au niveau de la machine en tête installée immédiatement en amont si le système ne comporte que $M=2$ machines en tandem. Dans le cas où $M>2$, la cause ultime d'une pénurie éventuelle des encours peut se localiser au niveau d'une machine située loin en amont, machine qui serait restée longtemps en état de panne, alors que les autres machines en aval auraient continué de produire, ce qui engendre à moyen terme la propagation d'un phénomène éventuel de pénurie vers l'aval. En dehors des pénuries, la panne prolongée d'une machine peut engendrer le blocage graduel des machines voisines en amont qui auraient continué à produire, étant donné que les magasins de stockage tampons ont des capacités finies. Bien que les phénomènes de pénurie s'avèrent économiquement indésirables si les ressources de production sont non fiables, il serait également coûteux de maintenir des quantités excessives de pièces dans l'atelier de production en tandem.

Ainsi, dans la classe de systèmes de fabrication en tandem, il est économiquement vital d'optimiser les volumes des encours et des stocks (Conway, Maxwell, McClain et

Thomas, 1988), en implantant des lois de production convenablement définies et adéquatement conçues. Mais quel est l'état de l'art par rapport à cette question ?

1.4 État de l'art sur la gestion sous-optimale de la production en tandem

Sous la vision de commande optimale stochastique, plusieurs chercheurs se sont intéressés au cours des dix dernières années, au problème d'optimisation du flux de production au niveau moyen de la décomposition hiérarchisée des ateliers de fabrication en tandem. À ce niveau de la hiérarchie, le problème de commande du flux de production en tandem est formulé comme un problème de commande optimale stochastique avec contraintes d'état et de commande, et l'application du principe de la programmation dynamique, conduit à des équations de Hamilton-Jacobi-Belmann de type stochastique, contraint et couplé. Il se dégage des travaux de plusieurs auteurs (Tsitsiklis, 1984; Van Ryzin, Lou et Gershwin, 1993; Veatch et Wein, 1994; Beyer and Sethi, 1997; Beyer, Sethi and Taksar, 1998; Song, Sun et Xing, 1998) que la résolution rigoureuse de ces équations est très difficile, sinon impossible. Cependant, en recherche opérationnelle (CONDOR, 1988; Arapostathis, Borkar, Gaucherand, Ghosh et Markus, 1993), on encourage vivement toute initiative visant à transformer un problème complexe quelconque, soit en un problème équivalent plus traitable, soit en un ensemble fini de sous-problèmes simplifiés faciles à résoudre.

Ainsi, l'utilisation de lois de production sous-optimales est en général incontournable. Mais encore faut-il disposer d'une méthodologie adéquate d'optimisation à l'intérieur de la classe des lois de production sous-optimales retenue. Plusieurs catégories de méthodes de conception des politiques de production sous-optimales, ont alors été proposées pour des systèmes de fabrication en tandem constitués de machines non fiables. Celles qui sont les plus fréquemment rencontrées seront passées en revue.

La méthode *asymptotique hiérarchisée* (Lehoczky, Soner and Taksar, 1991; Sethi et Zhang, 1994; Sethi et Zhou, 1994; Presman, Sethi et Zhang, 1995; Fong et Zhou, 1996;; Samaratunga, Lou, Sethi et Zhou, 1997) est basée sur la théorie de perturbations singulières. Elle consiste à résoudre le problème asymptotique déterministe (plus simple) obtenu en remplaçant les grandeurs stochastiques par leur valeur moyenne dans le problème stochastique original, puis à construire numériquement les solutions approchées du problème complexe original, à partir de celles trouvées pour le problème déterministe asymptotique, et ce pour un coefficient d'actualisation fixé. Cependant, le principe de la méthode ne donne pas d'assurance sur la résolution aisée d'un problème pratique de grande taille. Par ailleurs, l'adaptation de cette méthode au cas du critère de coût moyen considéré dans cette thèse n'est pas triviale, car cela exigerait l'emploi de faibles valeurs du taux d'actualisation (Sethi et Zhang, 1994; Colonius, 1989; et Wirth, 1993), auquel cas le temps de calcul requis pourrait devenir prohibitif. Finalement, les résultats obtenus par simulation (Sethi et Zhang, 1994) montrent que la solution obtenue par optimisation asymptotique hiérarchisée dépend fortement des conditions initiales.

La technique de commande à *double seuil* a été développée à l'origine pour un système de fabrication constitué de deux macro-machines (Lou et Kager, 1989; Van Ryzin, Lou et Gershwin, 1993). Elle consiste à maintenir autant que possible la production cumulée à un niveau constant (à déterminer) en cas de pénurie de stocks, et à maintenir le surplus (différence cumulée entre la production et la demande) de chaque machine à un niveau constant (à déterminer) si le stock des produits finis tend à devenir très grand. Sous cette politique, il est possible d'avoir des accumulations excessives des encours dans le magasin de stockage tampon, d'où la nécessité de connaître à l'avance la capacité limite de ce magasin. Bien que diverses simulations numériques (Van Ryzin, Lou et Gershwin, 1993) aient permis de constater que le contrôleur à *double seuil* est une bonne approximation de la loi de commande optimale, certains auteurs (Sethi et Zhang, 1994) ont noté que son exécution pour un problème de $M=2$ machines en tandem

requiert une importante puissance de calcul. Son extension au cas de $M > 2$ machines en tandem ne serait donc pas très aisée pour des applications en temps réel.

L'approche *heuristique hiérarchisée* (Bai et Gershwin, 1994 (cas multi-pièces), Bai et Gershwin, 1995 (cas mono-pièce)) est basée sur le contrôle de surplus à chaque niveau de la chaîne de production, et consiste à maintenir les différents surplus autant que possible à des niveaux constants respectifs à déterminer. Puisque, le niveau des pièces produites par chaque machine n'est pas directement contrôlé, le volume réel des pièces tampons peut éventuellement croître démesurément, d'où la nécessité de fixer à l'avance la capacité maximale de chaque magasin tampon. Cette approche heuristique conduit à un calcul récursif des seuils critiques des différents surplus, mais accorde peu d'intérêt à la structure et aux paramètres de la fonction coût du problème original.

L'approche de *décomposition stricte* développée à l'origine (Hu, 1995) pour un atelier constitué de deux machines en tandem, considère pour chaque machine un niveau critique de pièces à déterminer. Elle est caractérisée par le calcul du coût de production optimal de chaque machine prise isolément (sans couplage), et par le calcul d'un coût additionnel associé à l'état de privation en pièces de la machine opérant en aval. Cette démarche aboutit au fait que le niveau critique de pièces en amont est à la fois fonction du niveau critique requis en aval et du niveau instantané des encours. Non seulement elle ne tient pas compte de l'effet de pénurie des encours sur le comportement du stock des produits finis, mais elle n'est pas décentralisée. De plus, son extension au cas d'un système de production en tandem constitué de $M > 2$ machines est loin d'être triviale.

La méthode *d'optimisation stochastique* (Yan, Yin et Lou, 1994) a été développée pour le cas de deux machines en tandem opérant sous des lois de production à *seuils critiques* (niveau optimal d'inventaire à maintenir le plus longtemps possible comme police d'assurance contre les pannes éventuelles des machines) fixes. Nous reviendrons

en détail sur cette notion au chapitre 2. Le principe d'opération de la méthode d'optimisation stochastique pour deux machines en tandem (Yan, Yin et Lou, 1994) est similaire à celui des techniques IPA (Caramanis et Liberopoulos, 1992; Liberopoulos et Caramanis, 1994). Mais contrairement aux pures procédures IPA (Caramanis et Liberopoulos, 1992; Liberopoulos et Caramanis, 1994), visant à résoudre (par identification paramétrique et simulations stochastiques) une version approximative des équations de HJB, la technique d'optimisation stochastique développée par Yan, Yin et Lou en 1994, opère exclusivement dans l'espace des seuils critiques. L'objectif visé est de trouver les meilleurs seuils critiques en amont et en aval, qui minimisent le coût moyen total de production sur un horizon de temps suffisamment long. Notons qu'une telle stratégie de commande est décentralisée car chaque machine opère sous sa propre loi de production à seuil critique fixe. Cependant, la recherche des seuils critiques optimaux par l'approche d'optimisation stochastique (Yan, Yin et Lou, 1994) requiert déjà un effort de calcul important pour le cas de deux machines. Il s'ensuit que pour un problème de taille plus importante, l'explosion numérique semble incontournable.

Il se dégage de la revue de l'état de l'art ci-dessus résumée que beaucoup d'efforts ont déjà été consacrés à l'épineux problème de commande optimale ou sous-optimale du flux de production en tandem, mais les multiples insuffisances dégagées montrent qu'un long chemin reste encore à parcourir quant à l'optimisation des ateliers en tandem. Cette remarque nous conduit à la problématique de cette thèse.

1.5 Problématique de la thèse

À la lumière de multiples travaux existants précédemment présentés, il convient de remarquer que la plupart des techniques proposées jusqu'ici pour la conception des lois sous-optimales de production en tandem, ne sont ni faciles à implanter en temps réel, ni triviales à généraliser pour un problème de grande taille. Bien que des résultats

analytiques soient disponibles dans la littérature des systèmes mono-machines, opérant sous des lois de production de type seuils critique(s), l'utilisation de ces résultats analytiques de base, comme blocs de construction pour la conception des stratégies sous-optimales de production en tandem, n'a pas encore été envisagée à notre meilleure connaissance. Cette constatation nous amène à focaliser notre attention sur *la classe de politiques décentralisées production à seuils critiques* pour machines non fiables, organisées en tandem. Elle consiste à associer à chaque machine un ensemble fini de seuils critiques fixes à déterminer, de sorte à ce que les informations disponibles immédiatement en amont et en aval de chaque machine suffisent à la gestion locale du flux.

Notre choix exclusif de lois décentralisées de production, à seuils critiques, pour machines non fiables organisées en tandem, repose sur cinq constats centraux: 1) ces lois sont fondées sur le concept naturel et intuitif de *seuils critiques*, en tant que police d'assurance contre les pannes des machines et autres aléas du processus de production; 2) elles sont décentralisées, et par conséquent les effets d'un aléa survenu au niveau d'une machine peuvent être absorbés localement sans la nécessité de réactualiser les règles de pilotage des machines éloignées. On s'attendrait donc à obtenir sous cette classe de lois de production, une meilleure stabilité globale de l'atelier, vis-à-vis des phénomènes perturbateurs à contenu fréquentiel élevé; 3) elles s'avèrent plus aisées à comprendre et à utiliser; 4) dans un contexte de modélisation fluide, leur principe d'opération est similaire à celui des stratégies populaires Kanban (Mascolo, Frein et Dallery, 1996; Crouhy et Greif, 1991); 5) Les simulations indiquent qu'elles semblent souvent comporter des candidats dont les performances sont proches des performances optimales (Yan, Yin et Lou, 1994). Les observations ci-dessus nous conduisent à fournir en guise de conclusion de ce chapitre introductif les objectifs scientifiques de la thèse ainsi que l'approche de résolution des problèmes retenue.

1.6 Objectifs scientifiques et méthodologie

La présente thèse a pour but de développer de nouvelles techniques de caractérisation, à l'intérieur des lois décentralisées de production à *seuils critiques* des lois de commande optimale du flux de production mono-pièce pour machines non fiables, organisées en tandem. Les nouvelles techniques envisagées doivent permettre, de déterminer le plus vite possible les différents seuils critiques qui minimisent le coût global de production des pièces dans l'atelier. Par ailleurs, contrairement aux techniques existantes, celles développées dans cette thèse devraient être aisées à comprendre, conviviales à exploiter, et généralisables sans complexité explosive au cas de $M > 2$ machines en tandem. Elles doivent de plus permettre d'obtenir de bonnes performances. Les implications de nos développements sur l'analyse aussi bien des chaînes de production multi-pièces que sur les réseaux de production devront être apparentes. Finalement, nos développements subséquents devront s'intégrer dans un schéma de commande hiérarchisé des ateliers de fabrication en tandem.

Pour atteindre ces multiples objectifs, le plus grand défi est de trouver une méthodologie originale susceptible de réaliser le bon compromis entre la simplicité et la qualité. Les fondements de notre méthodologie d'optimisation à l'intérieur de la classe de politiques décentralisées de production à seuils critiques, sont développés au chapitre 2 pour le cas de deux machines en tandem. La généralisation de nos développements de base au cas de $M > 2$ machines en tandem, est présentée au chapitre 3, et les propriétés des lois décentralisées de commande à seuils critiques pour machines en tandem sont présentées au chapitre 4.

Au chapitre 2, nous nous concentrons sur le niveau moyen de la décomposition hiérarchisée d'un atelier mono-pièce constitué de deux machines en tandem, la problématique dominante étant de développer à partir d'un modèle fluide de l'atelier,

une nouvelle méthodologie d'optimisation du flux de production sous des lois de commande décentralisées à seuils critiques. Nos développements mathématiques et résultats obtenus dans le cadre de ce chapitre sont détaillés dans l'article intitulé (voir Annexe I) "*Optimization of a class of decentralized hedging policies in a stochastic two-machine flow shop*". Notre démarche est fondée sur trois stratégies d'approximation: le principe d'approximation par découplage paramétrique des deux machines, le principe d'approximation par moyennage de la demande, et la markovianisation des processus stochastiques d'encours. Cette démarche débouche sur la possibilité d'utiliser de façon intensive et efficace les outils analytiques disponibles pour systèmes mono-machines isolés, en vue de la construction de notre schéma de base d'optimisation hiérarchisé qui constitue la première contribution originale de cette thèse. Le schéma d'optimisation hiérarchisé proposé, consiste d'abord à calculer analytiquement les coûts de production encourus au niveau de chaque machine, et ce pour un choix particulier du seuil critique en amont (ou de façon équivalente pour un coefficient de disponibilité des encours). Par la suite, le coût global analytique obtenu dans l'espace des paramètres (seuils critiques ou coefficients de disponibilité des encours) est optimisé. Comparé aux techniques existantes inventoriées dans l'introduction de cette thèse, notre schéma d'optimisation de base, est à notre connaissance, celui qui exploite le mieux la boîte à outils analytiques disponibles sur les systèmes isolés mono-machines, et qui puisse se généraliser sans complexité explosive pour un problème de grande taille mettant en jeu $M > 2$ machines en tandem. Notons que la version Matlab intégrée de notre schéma de base d'optimisation hiérarchisée développée avec les outils des logiciels Maple V (Darren-Redfern, 1996) et Matlab (Matlab V, 1996), tourne presque instantanément sous un environnement inférieur au standard, de type Pentium 166 Mhz. Tous nos résultats ont été validés au moyen d'un simulateur de Monte-Carlo, que nous avons construit à partir d'un générateur de pannes markoviennes, obtenu par combinaison des algorithmes de base disponibles (Naylor, Balintfy, Burdick et Chu, 1966; Sethi et Zhang, 1994).

Au chapitre 3, notre schéma d'optimisation de base proposé au chapitre 2, est généralisé sans complexité excessive au cas d'un atelier de fabrication constitué par $M > 2$ machines organisées en tandem. Ici encore, le principe d'approximation de découplage paramétrique des machines, ainsi que le principe d'approximation par moyennage de la demande, et la technique de markovianisation des processus des encours, jouent un rôle important dans notre analyse. Notre analyse indique que du point de vue du calcul des coûts de production, le système de $M > 2$ machines en tandem ne comporte que 3 catégories de machines isolées: une machine en tête équivalente (décrite par un paramètre de disponibilité), $M-1$ machines intermédiaires de même modèle (deux paramètres consécutifs de disponibilité requis en amont) et une machine terminale (associée à deux paramètres consécutifs de disponibilité en amont). Le schéma généralisé d'optimisation hiérarchisé proposé, consiste à calculer analytiquement (en fonction des seuils critiques appropriés) le coût de production encouru au niveau de chaque machine, et ce pour un choix particulier des paramètres associés (seuils critiques, ou de façon équivalente coefficients de disponibilité des encours); par la suite, le coût analytique global obtenu dans l'hyperespace des paramètres considérés est optimisé. Notre schéma généralisé d'optimisation est la seconde contribution originale de cette thèse. Par rapport aux schémas d'optimisation existants, il présente l'avantage d'être plus facile à comprendre (puisque bâti à partir de la boîte à outils analytiques des systèmes mono-machines), d'être très facile à exploiter en temps réel du fait de sa rapidité d'exécution, d'être aisément applicable aux problèmes de grande taille sans complexité excessive (à cause de la décentralisation), tout en permettant d'atteindre des performances acceptables.

Enfin, la robustesse de la qualité de l'important principe d'approximation par moyennage de la demande, ainsi que les caractéristiques des fonctions coût global dans le contexte des lois décentralisées de production à seuils critiques, sont explorées au chapitre 4, à la fois par voie de simulation de Monte-Carlo et par voie de calcul

numérique. Les résultats obtenus indiquent que la haute qualité du principe d'approximation par moyennage, vis-à-vis de variations du taux de demande des produits finis et autres paramètres, ne se dément pas. Il se dégage aussi l'intéressante propriété que les coefficients de disponibilité optimaux des encours dépendent uniquement de la capacité minimale parmi les machines en tandem, et ce en supposant que les paramètres de fiabilité des machines demeurent fixés. Enfin, on constate que le coefficient de pénalisation des encours en têtes a un impact dominant sur la forme de la fonction coût qui toutefois demeure en général convexe. Une justification mathématique détaillée de telles propriétés n'a pas été entreprise dans la thèse mais pourra s'avérer une direction de recherche prometteuse dans l'avenir.

CHAPITRE 2

OPTIMISATION D'UNE CLASSE DE POLITIQUES DÉCENTRALISÉES DE PRODUCTION, À SEUILS CRITIQUES, POUR DEUX MACHINES NON FIABLES EN TANDEM

Dans ce chapitre, nous présenterons d'abord les caractéristiques essentielles d'un atelier mono-pièce de base constitué de deux machines en tandem. Nous passerons ensuite en revue les principaux résultats disponibles dans la littérature des systèmes mono-machines, produisant un seul type de pièces. Ces résultats serviront de bloc de construction dans l'élaboration des fondements de notre méthodologie d'optimisation à l'intérieur de la classe sous-optimale des politiques décentralisées de production à seuils critiques. Le schéma de base d'optimisation hiérarchisée qui en résulte sera présenté. Nous résumerons enfin les principaux résultats obtenus pour un large échantillon de systèmes de fabrication mono-pièces, constitués de deux machines non fiables organisées en tandem.

Les développements mathématiques et les résultats associés à ce chapitre, sont détaillés dans l'article intitulé (voir Annexe I) "*Optimization of a Class of Decentralized Hedging Policies in a Stochastic Two-machine Flow Shop*".

2.1 Système de fabrication en tandem: cas de deux machines

Le système de fabrication considéré est de type mono-pièce. Il est constitué de deux machines (M_1 en amont, et M_2 en aval) non fiables organisées en tandem, d'une

zone de stockage des encours et d'un magasin de stockage des produits finis. Pour des raisons de clarté, un tel système est habituellement représenté par un schéma hautement simplifié (voir figure 1, Annexe I). Par ailleurs, les hypothèses simplificatrices standards suivantes sont adoptées: Chaque machine M_i ($i=1, 2$) est sujette à des pannes (état zéro) et des réparations (état 1) markoviennes dont les taux de transitions sont constants. Le fournisseur en matière première associé à la machine en tête M_1 est parfaitement fiable, et le processus de pannes des machines est supposé dépendre uniquement du temps et non du nombre d'heures d'opération. Les magasins de stockage des produits sont supposés suffisamment grands, et les délais dus au transport et au traitement de matière au niveau des machines, sont négligeables comparés aux autres constantes de temps du système de production. Les retards de livraison des produits finis sont admis en échange d'un certain coût. Il n'y a ni création, ni rejet de pièces dans le système de fabrication considéré. Par ailleurs, la *capacité* (taux maximal de production) de la machine M_1 installée en amont est *supérieure ou égale à celle de M_2* . Enfin, le critère de performance retenu est le coût moyen total associé aux encours/inventaires et aux déficits de production sur horizon infini, auquel cas les problèmes d'optimisation associés s'avèrent plus difficiles à traiter (Arapostathis, Borkar, Gaucherand, Ghosh et Markus, 1993).

Au sein de la décomposition hiérarchisée du système de production mono-pièce ci-dessus présenté, nous nous concentrerons sur le niveau moyen de commande du flux de production en tandem, niveau pour lequel le caractère granulaire de la production peut être approché par un continuum; la problématique dominante est celle de minimiser une mesure combinée des coûts d'inventaire et des retards de livraison, en tenant compte aussi bien des effets des pannes de machines qu'autres aléas.

Notre approche d'optimisation hiérarchisée du flux de production en tandem à l'intérieur de la classe sous-optimale des politiques décentralisées de production, à seuils critiques, sera fondée sur l'extension et l'adaptation des résultats analytiques

disponibles pour les machines isolées. Il est donc important de rappeler d'abord ces résultats qui serviront plus tard de blocs de construction pour notre schéma de base d'optimisation hiérarchisé.

2.2 Principaux résultats disponibles pour ateliers mono-machines et mono-pièces

Dans cette section, les principaux résultats analytiques disponibles pour ateliers rudimentaires mono-pièces et mono-machines seront résumés. Dans chaque cas considéré, nous prendrons soin de préciser l'intérêt du modèle étudié dans un contexte de production en tandem.

Partant du modèle continu d'un atelier rudimentaire mono-pièce, les conditions d'optimalité des lois de production à *seuils critiques* ont été établies (Akella et Kumar, 1986; Bielecki et Kumar, 1988; Hu, Vakili et Yu, 1994) pour une machine isolée élémentaire (un seul type de pièces, deux états Markoviens, taux de demande constant, structure linéaire du critère à optimiser). Ainsi, du point de vue des coûts aussi bien de stockage des pièces que de pénurie éventuelle de stock, il existe un niveau d'inventaire optimal (ou seuil critique), et la *loi de commande optimale à seuil critique* consiste à veiller autant que possible, au maintien de ce niveau. Autrement dit, elle consiste à:

- produire au maximum de la capacité disponible si la machine est opérationnelle et le niveau d'inventaire observé inférieur au seuil critique;
- produire au rythme de la demande une fois que le seuil critique est atteint;
- ne rien produire si la machine est en panne.

Résumons d'abord les résultats publiés par Bielecki et Kumar en 1988. Leur modèle de machine élémentaire étudié est caractérisé par deux états markoviens, un processus d'approvisionnement parfaitement fiable, un taux de demande constant, des retards éventuels de livraison permis en échange de certaines pénalités, et un critère de

coût moyen à optimiser. En plus d'avoir établi les conditions d'optimalité des lois de production à seuils critiques, ils ont développé les expressions analytiques exactes du seuil critique optimal et du coût optimal en fonction des paramètres de la machine unique. Cependant, il n'y a en général aucune garantie quant à l'optimalité de la politique de production à seuil critique. En effet, même dans le cas mono-pièce et mono-machine, l'hétérogénéité de la chaîne de Markov associée aux processus de pannes et de réparations (Boukas et haurie, 1990; Boukas, 1995; Boukas et Yan, 1996), la relaxation de l'hypothèse markovienne (Hu et Xiang, 1995; Krichigana, Lou et Taksar, 1995), la stochasticité du processus de demande (Postner et Berg, 1989; Sethi et Zhang, 1994; Berg et Postner, 1994; Song et Sun, 1999) sont autant de situations pour lesquelles la propriété d'optimalité des lois de production à seuils critiques est susceptible de se détériorer. Malheureusement, toutes ces situations sont présentes dans les systèmes de fabrication constitués de machines en tandem. Notre intuition nous amène toute fois à penser que le modèle de machine étudié par Bielecki et Kumar en 1988 peut être utile, puisqu'il présente beaucoup de similarités avec la machine terminale d'un système de fabrication en tandem (sauf en cas de pénurie éventuelle des encours). Dans la thèse, ce modèle de machine isolée est désigné par la terminologie *machine de type Bielecki-Kumar*.

Le cas d'une *machine de type Bielecki-Kumar* pour laquelle les retards à la livraison ne sont pas permis a été étudié et publié plus tard par Hu en 1995-a. Ce dernier a également établi aussi bien les expressions analytiques des lois de probabilités associées à l'inventaire, que celles des coûts de production associés. Nous verrons plus loin que le modèle de machine considéré par Hu peut présenter un grand intérêt en ce qui concerne l'étude de la machine en tête d'une chaîne de fabrication en tandem. Dans la thèse, ce modèle de machine étudié par Hu en 1995-a est désigné par l'appellation simplifiée *machine de type Hu*.

Le cas d'une machine isolée à plusieurs états markoviens (ou de manière équivalente le cas de plusieurs machines à deux états markoviens organisées en parallèle) a été au centre de plusieurs travaux de recherche (Sharifnia, 1988; Algoet 1989, Sethi et Zhang, 1994). Il se dégage de ces travaux que les lois de commande à seuils critiques sont caractérisées par des classes commande, définies par un ensemble fini de seuils d'inventaire, et comportant un éventuel candidat dont la performance est optimale. La méthodologie de calcul des seuils critiques optimaux proposée par Sharifnia en 1988 est basée sur la résolution en régime permanent, des équations différentielles linéaires par morceaux, décrivant les fonctions de densité de probabilité de l'inventaire, suivie du calcul analytique du coût total de production en fonction des *niveaux critiques arbitraires* pris comme paramètres. Les seuils critiques optimaux sont alors obtenus en minimisant le coût de production résultant dans l'espace des paramètres. À ce stade, le lien entre le modèle de machine multi-états (Sharifnia, 1988) et une machine d'une chaîne de production en tandem n'est pas trivial, mais nous verrons plus loin que ce lien peut être établi au moins sous un angle approximatif. Ce modèle de machine traité et publié par Sharifnia en 1988 est désigné dans cette thèse par la terminologie *machine de type Sharifnia*.

Une étude plus poussée de la *machine de type Sharifnia* a été publiée plus tard (Malhamé et Boukas, 1991-a, 1991-b). Les auteurs de cette étude ont établi les équations aux dérivées partielles décrivant les transitoires des fonctions de densité de probabilité du niveau d'inventaire, et ont aussi défini les conditions aux frontières requises pour la résolution de ces équations. Ils ont de plus développé les propriétés des lois de production à seuils critiques du point de vue de la théorie des processus de renouvellement Markoviens. L'un des concepts fondamentaux qui ressort de leurs travaux est celui du temps de premier retour de l'inventaire à un niveau quelconque. Nous montrerons plus loin que ce concept peut être utile pour la modélisation statistique des cycles de pénurie des encours dans les systèmes de production en tandem.

Malhamé a établi en 1991 et publié en 1993 le théorème d'ergodicité du processus de production d'un atelier de fabrication constitué d'une *machine de type Sharifnia*. Ce théorème stipule qu'une *machine de type Sharifnia* à n états dont m états sont *réalisables* (états pour lesquels la capacité de la machine est supérieure à la demande; à chaque état réalisable correspond un seuil critique à déterminer) est ergodique si et seulement si le processus admet $n-m$ valeurs propres à partie réelle positive, une valeur propre nulle et $m-1$ valeurs propres à partie réelle négative. Les résultats du théorème d'ergodicité s'avèreront utiles pour le calcul en régime quelconque des densités de probabilité de l'inventaire produits par les machines isolées d'un système de production en tandem une fois judicieusement décomposé.

El-Férik et Malhamé ont développé et publié en 1997 un algorithme récursif généralisé pour le calcul des moments des premiers temps de passage de l'inventaire vers un niveau quelconque. Ils ont aussi montré que l'application de ces moments dans la construction des approximations de Padé du processus semi-markovien d'inventaire, conduit à une excellente approximation du coût moyen de production sur horizon fini ou infini. Une adaptation convenable de leurs résultats peut permettre de construire de bons modèles markoviens approximatifs pour les machines isolées d'un système de fabrication adéquatement décomposé, auquel cas le calcul des *coefficients de variation* (Griffiths, 1996) associés aux premiers moments du temps de premier passage peut servir d'indice de qualité pour les approximations markoviennes utilisées.

Les liens entre les résultats analytiques de base présentés dans cette section pour systèmes mono-machines isolés et les machines individuelles d'un système de production en tandem, seront plus transparents lorsque nous aurons défini les fondements associés à notre approche d'optimisation proposée.

2.3 Fondements de l'approche d'optimisation proposée

Notre démarche est fondée sur deux principes d'approximation: le principe de *découplage approximatif des machines*, et le principe d'approximation par *moyennage de la demande*. À ces deux principes s'ajoutent les techniques de markovianisation, basée sur la théorie de temps de premier retour à zéro.

Notre principe de *découplage approximatif des machines* (voir figure 2, Annexe I) résulte intuitivement de la structure naturelle série des machines M_1 et M_2 . Selon la philosophie de base de la classe de politiques décentralisées de production à seuils critiques (voir équation (3), Annexe I), chaque machine M_i ($i = 1, 2$) opère sous sa propre loi de commande à seuil critique Z_i ($i = 1, 2$) constant. Le principe de découplage approximatif des machines stipule que la machine M_2 installée en aval voit l'univers des encours en amont comme un *processus binaire* $I_{x_i > 0}$ (fonction indicatrice de l'ensemble $x_i > 0$) supposé indépendant de l'état opérationnel de M_2 , alors que l'environnement aval est vu par la machine en tête M_1 comme un client dont le taux de demande est stochastique. Après ce découplage approximatif, le lien entre les deux machines isolées obtenues, est assuré par le(s) paramètre(s) statistique(s) du processus stochastique de disponibilité des encours traités par la machine M_2 installée en aval.

Le principe d'*approximation par moyennage de la demande* (voir section 3.2, Annexe I) stipule que sous l'hypothèse d'ergodicité et pour une fonction coût linéaire, le coût moyen de production encouru par la machine M_1 située en amont est très proche du coût qui aurait pu être encouru par la même machine si son taux stochastique $d_1(t)$ de demande réelle imposée par la machine M_2 était remplacé par la moyenne à long terme de ce dernier. En définitive, du point de vue des calculs du coût amont, ce serait donc la moyenne $E(d_1(t))$ du taux de demande stochastique de M_1 qui importe, laquelle moyenne est exactement égale au taux constant de demande des produits finis en raison de la

contrainte d'ergodicité (en effet, une condition nécessaire et suffisante d'ergodicité se traduit par la stabilité des encours et des produits finis).

Comme implications de nos deux principes, le système original de deux machines en tandem est transformé, en deux sous-systèmes isolés mono-machines. Le premier sous-système est une machine en tête de *type Hu* (fournisseur fiable, chaîne de Markov à 2 états, taux de demande constant et retard de livraison non permis) dont le coût dépend explicitement du seuil critique Z_1 en amont (voir équation (5), Annexe I). Le second sous-système isolé est une *machine de type Bielecki-Kumar* (machine de Hu avec retard de livraison permis) dont le processus des encours est stochastique.

Cependant, le calcul des moments du temps de premier passage à zéro (avec l'algorithme de El-Férik et Malhamé, 1997) de ce processus stochastique des encours, et la détermination des approximants de Padé associés, permet de construire un modèle markovien approximatif aussi précis que l'on désire du processus des encours (voir section 3.3.2, Annexe I). Ainsi, le modèle markovien approximatif du sous-système en aval isolé, est obtenu par le *produit Cartésien* de deux espaces d'état associés respectivement au modèle markovien approximatif des encours, et à celui de la chaîne de Markov liée au comportement non fiable de la machine M_2 , et ceci en vertu de la propriété d'indépendance conséquente au principe de découplage). Le modèle de machine en aval ainsi obtenu aux termes de nos approximations markoviennes (voir Annexe I; figure 3), correspond à une *machine de type Sharifnia* facile à analyser, dont le coût optimal requis pour un choix particulier du seuil critique Z_1 en amont, dépend explicitement aussi bien du seuil critique Z_2 en aval, que du seuil critique Z_1 en amont. À ce stade, les fondements de notre schéma d'optimisation hiérarchisée sont en place.

Avant de présenter notre *schéma de base d'optimisation* hiérarchisé, il convient de préciser qu'il existe une relation explicite (voir Annexe I; équation (10)) entre un seuil

critique arbitraire Z_1 , et le coefficient correspondant de disponibilité des encours, noté a . L'optimisation paramétrique peut donc s'effectuer soit en considérant directement Z_1 comme paramètre, soit de façon équivalente en prenant pour paramètre le coefficient normalisé a ($0 \leq a \leq 1$) de disponibilité des encours. A noter que le concept de *coefficient de disponibilité* est une grandeur caractéristique importante des processus de fabrication (Viswanadham et Narahari, 1992).

2.4 Schéma d'optimisation hiérarchisé proposé

Notre schéma de base d'optimisation hiérarchisé (voir Annexe I; figure 4) constitue la première contribution originale de cette thèse. Il opère suivant les étapes suivantes :

- définir les paramètres des machines M_1 et M_2 en tandem (taux de pannes, taux de réparation, et capacités);
- fixer un seuil critique Z_1 (ou le coefficient de disponibilité a) pour la machine en amont;
- utiliser le principe d'approximation par moyennage de la demande et le résultat de la *machine de type Hu* pour calculer analytiquement le coût $J_1(Z_1)$ ou de façon équivalente $J_1(a)$: voir l'équation (5) de l'annexe I;
- utiliser l'hypothèse d'indépendance des deux sous-systèmes découplés mono-machines, pour construire un modèle markovien approximatif d'au moins quatre états de M_2 (voir Annexe I; figure 3);
- utiliser les résultats de la *machine de type Sharifnia* pour trouver le seuil critique $Z_2^*(Z_1)$ ou $Z_2^*(a)$ requis en aval qui minimise le coût analytique $J_2(Z_2^*(Z_1))$ ou de façon équivalente $J_2(Z_2^*(a))$; voir les équations 21 et 22 de l'Annexe I.
- optimiser le coût analytique global $J_1(Z_1)+J_2(Z_2^*(Z_1))$ par rapport à Z_1 , ou $J_1(a)+J_2(Z_2^*(a))$ par rapport à a , pour obtenir les seuils critiques optimaux Z_1^* et $Z_2^*=Z_2^*(Z_1^*)$ ou $Z_2^*=Z_2^*(a^*)$; voir l'équation (23) de l'Annexe I.

2.5 Applications et résultats

Notre schéma de base d'optimisation hiérarchisé a été testé et validé au moyen d'un simulateur de Monte-Carlo que nous avons développé à cette fin. L'organe central de ce simulateur est un *générateur de pannes markoviennes*, que nous avons développé à partir d'une combinaison appropriée d'algorithmes existants (Naylor, T. H., Balintfy, J. L., Burdick, D. S. et Chu, K., 1966; Sethi et Zhang, 1994). Pour les besoins de simulation, nous avons codé en binaire l'espace d'état $\xi = \{1, 2, 3, 4\}$ des machines M_1 et M_2 de la façon suivante: $\xi \equiv 1$ si $(\alpha_1=0, \alpha_2=0)$, $\xi \equiv 2$ si $(\alpha_1=0, \alpha_2=1)$, $\xi \equiv 3$ si $(\alpha_1=1, \alpha_2=0)$, et $\xi \equiv 4$ si $(\alpha_1=1, \alpha_2=1)$, où α_i correspond à l'état binaire de la machine M_i ($i=1, 2$). Avec ce codage BCD (décimal codé en binaire) translaté, la matrice d'intensité utilisée par notre générateur automatique des pannes markoviennes des machines s'écrit sous la forme:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -r_1 - r_2 & r_2 & r_1 & 0 \\ p_2 & -r_1 - p_2 & 0 & r_1 \\ p_1 & 0 & -p_1 - r_2 & r_2 \\ 0 & p_1 & p_2 & -p_1 - p_2 \end{pmatrix}$$

où r_i =taux de pannes de M_i , $i=1, 2$ et p_i =taux de réparation de M_i , $i=1, 2$. Notre environnement complet de Monte Carlo permet de simuler les trajectoires des états discret $\xi(t)$ et continu $x(t)=(x_1(t), x_2(t))^T$ et celles des coûts de production associés pour des seuils critiques arbitraires Z_1 et Z_2 . Par exemple, en considérant les données suivantes: $r_1=r_2=0.4$, $p_1=p_2=0.1$, $Z_1=Z_2=5$ et $d=1$; $k_1=2.5$; $k_2=2$, $c_1=2$, $c_2^+=2$, $c_2^-=6$, nous avons enregistré sur un intervalle de temps très court (pour faciliter la visualisation) deux exemples typiques des trajectoires des états $\xi(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (voir figure 1.2). On y remarque que tous les types de scénarios caractéristiques des systèmes en tandem sont présents (pénuries et disponibilité éventuelles des encours, pannes et réparations des

machines, retard de livraison, départs et recouvrement des seuils critiques). La convergence des coûts J_1 et J_2 est illustrée par la figure 1.3, où deux réalisations de chacun des processus $J_1(\xi, t)$ (figure 1.3.1) et $J_2(\xi, t)$ (figure 1.3.2) convergent vers la même limite. Ceci est une conséquence de la propriété d'ergodicité.

Le simulateur de Monte-Carlo décrit ci-dessus nous a permis de valider les résultats prédits par notre schéma d'optimisation hiérarchisé sur un très large échantillon de systèmes de deux machines en tandem. Ces résultats sont présentés et comparés de façon détaillée en annexe I. Les observations essentielles qui se dégagent de ces résultats se résument comme suit:

- l'espace des seuils critiques Z_1 en amont, est équivalent à l'espace des coefficients de disponibilité \mathbf{a} des encours (voir Annexe I; équation (10));
- notre principe de moyennage de la demande est hautement précis (voir annexe I; figure 7 et tableau 2);
- La haute précision du principe de moyennage se maintient lors des variations admissibles de la demande terminale (voir Annexe I; tableau A.3.1);
- le coefficient de variation du temps de premier retour à zéro du processus des encours (fournisseur de la machine M_2) est suffisamment proche de un (voir Annexe I; figure 5), auquel cas la loi de probabilité associée à ce processus est *quasiment exponentielle*;
- le premier moment du temps de premier passage à zéro précédent est suffisant pour l'obtention d'un modèle markovien approximatif raisonnable d'ordre quatre de la machine M_2 . Ceci est une conséquence directe des valeurs voisines de un associées aux coefficients de variation du temps de premier passage à zéro des encours;
- le coût global semble être une fonction convexe du paramètre de disponibilité \mathbf{a} (voir Annexe I; figure 5), mais la démonstration mathématique éventuelle de cette propriété de convexité, si elle est vraie en général reste à établir.

- les performances prédites par notre schéma d'optimisation hiérarchisé, sont assez proches de celles obtenues par simulations de Monte-Carlo (sous la même classe de politiques de production) sur le système couplé original de machines en tandem (voir Annexe I; tableau 2);
- dans un environnement largement inférieur au standard actuel (Pentium 166 Mhz), la version Matlab de notre schéma d'optimisation hiérarchisé de base tourne presque instantanément. Ce dernier constat nous amène à la conclusion de ce chapitre.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, deux principes d'approximation par découplage des machines et moyennage de la demande, ainsi que la technique de markovianisation des processus stochastiques des encours, nous ont permis de transformer le problème complexe de deux machines en tandem, en deux sous-problèmes isolés de type standard. Telle est la démarche originale qui nous aura permis de bâtir notre schéma d'optimisation hiérarchisé, à partir des outils analytiques de base disponibles dans la littérature des systèmes mono-machines.

Par rapports aux méthodologies existantes citées dans l'introduction de cette thèse, le schéma de base d'optimisation hiérarchisé développé dans ce chapitre se distingue par les principaux atouts suivants:

- facilité de compréhension et d'implantation;
- exécution presque instantanée dans un environnement de calcul inférieur au standard;
- possibilité de généralisation au cas de $M > 2$ machines sans complexité explosive comme nous le verrons au chapitre 3.

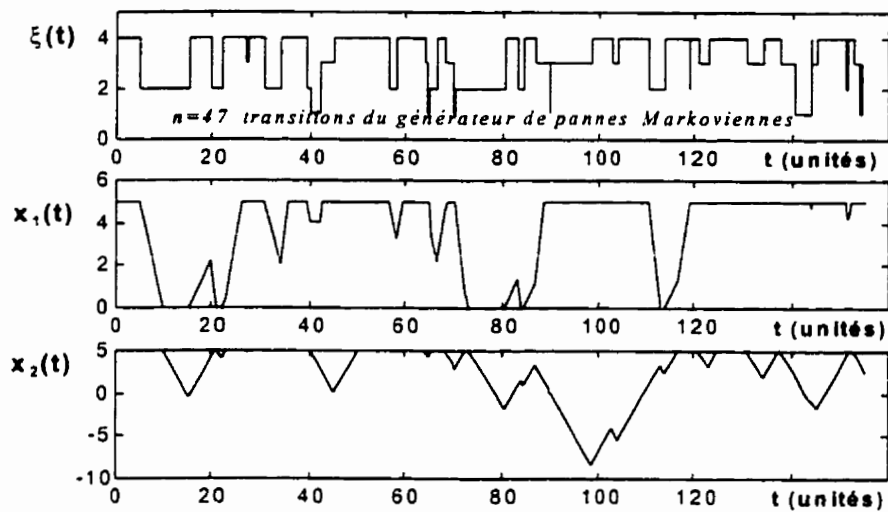


Figure 2.1.1: Trajectoires de $\xi(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (exemple 1)

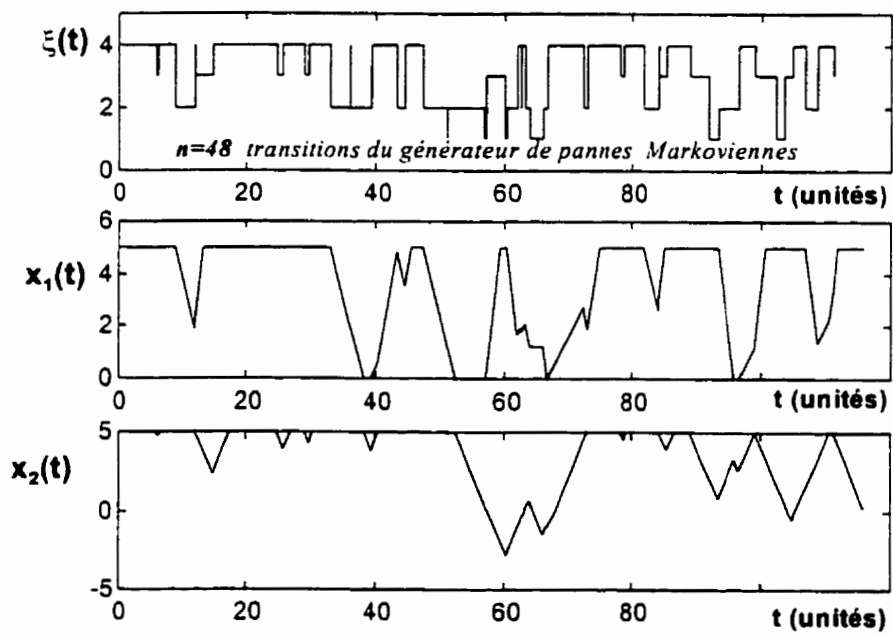
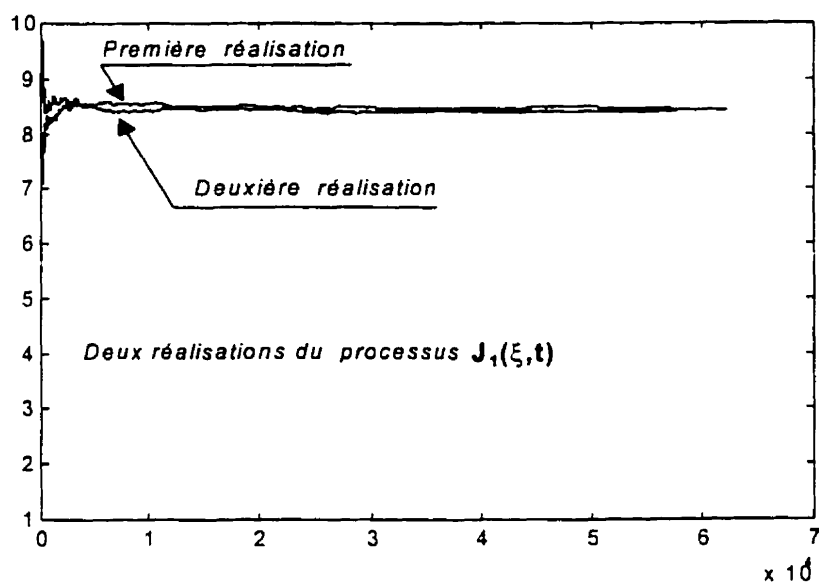
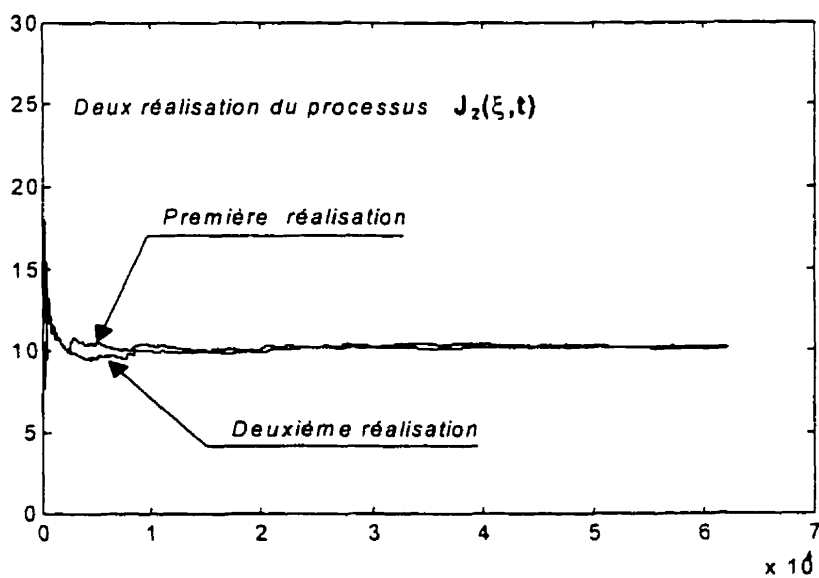


Figure 2.1.2 : Trajectoires de $\xi(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (exemple 2)

Figure 2.1: Trajectoires des états $\xi(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sur un horizon court

Figure 2.2.1: Convergence du processus $J_1(\xi, t)$ Figure 2.2.2: Convergence du processus $J_2(\xi, t)$ Figure 2.2: Convergence des coûts moyens $J_1(\xi, t)$ et $J_2(\xi, t)$

CHAPITRE 3

OPTIMISATION D'UNE CLASSE DE POLITIQUES DÉCENTRALISÉES DE LA PRODUCTION, À SEUILS CRITIQUES, POUR M MACHINES NON FIABLES EN TANDEM

La complexité des équations de la programmation dynamique associée à la commande optimale de la production pour machines non fiables en tandem, a suscité dans le passé le développement des techniques d'analyse et des classes sous-optimales de politiques de production. Cependant, en dehors de la technique heuristique proposée par Bai et Gershwin en 1994, les autres techniques connues (Sethi et Zhang, 1994; Hu, 1995-b; Yan et Yin, 1994) s'avèrent peu triviales à comprendre et particulièrement difficiles à implanter lorsque le nombre de machines en tandem est supérieur à 2. Face à ce problème, nous proposons dans ce chapitre de construire une version généralisée du schéma d'optimisation hiérarchisé proposé au chapitre 2 de cette thèse. Le schéma proposé présentera beaucoup d'atouts dont la simplicité d'utilisation, la rapidité d'exécution et les bonnes performances.

En vue d'atteindre ce but, nous commencerons par décrire le système de production en tandem considéré. Un accent particulier sera mis sur la généralisation de nos principes d'approximation et sur la technique de markovianisation des processus de disponibilité des encours. Les trois types de modèles de machines obtenus après décomposition seront présentés. Nous présenterons aussi notre schéma généralisé d'optimisation pour $M > 2$ machines en tandem, ainsi qu'un résumé des résultats obtenus pour un vaste échantillon de trois machines en tandem. L'essentiel de ce chapitre est contenu dans l'article intitulé (Annexe II): "*Decentralized Hedging Production Control for M Unreliable Tandem Machines in Stochastic Manufacturing Systems*".

3.1 Système de production en tandem considéré

Le système de fabrication en tandem considéré est de type mono-pièce. Il est constitué (de l'amont à l'aval) de $M > 2$ machines M_1, M_2, \dots, M_M supposées non fiables et organisées en tandem. Une zone de stockage des produits est allouée à chaque machine. Pour des raisons de clarté, un tel système de fabrication est représenté par un schéma hautement simplifié (voir Annexe II ; figure 1). Par ailleurs, les hypothèses simplificatrices suivantes (couramment utilisées pour les systèmes de production) seront indispensables ultérieurement. Chaque machine M_i ($i=1, 2, \dots, M$) est sujette à des pannes et réparations de durées exponentielles dont les taux respectifs p_i et r_i sont supposés constants. La machine en tête M_1 est approvisionnée par une source parfaitement fiable, et le processus de pannes des machines est supposé dépendant du temps et non de la durée cumulative des opérations. Les magasins de stockage des produits finis et semi-finis sont supposés suffisamment grands, et les délais dus au transport et au traitement de matière au niveau des machines, sont négligeables comparés aux autres constantes de temps du système de production. Pour notre étude, nous admettons de plus que *la capacité maximale de la machine M_i est supérieure ou égale à celle de la machine M_{i+1}* , pour $i=1, 2, \dots, M-1$. Les retards de livraison des produits finis sont admis en échange de certaines pénalités. De plus, il n'y a ni création, ni rejet, ni recirculation de pièces dans le système de fabrication considéré. Enfin, le critère de performance retenu est le coût moyen total de production sur horizon infini (voir Annexe II; équation (1)).

À nouveau, notre travail dans le cadre de la décomposition hiérarchisée des activités associées au système de production ci-dessus présenté, se situe au niveau moyen de la commande du flux de production en tandem. Ce niveau moyen est basé sur le fait que le processus de production dans l'atelier peut être raisonnablement décrit par un modèle fluide (voir Annexe II; équation (2)). La problématique centrale est une

fois de plus de minimiser à l'intérieur de la *classe de politiques décentralisées de production à seuils critiques* (voir Annexe II; formules (5), (6) et (7)) une mesure combinée des coûts d'inventaire et des retards de livraison, en tenant compte de la nature stochastique du processus de fabrication. Une généralisation de la méthodologie utilisée au chapitre 2 nous permettra d'atteindre nos objectifs. Cette généralisation consiste à transformer le système complexe original de M machines en tandem en M sous-systèmes mono-machines isolés. Nous y parviendrons à l'aide de versions généralisées des principes de *découplage approximatif des machines* et de *moyennage de la demande*, suivies de la technique de *markovianisation* des sous-systèmes découplés obtenus.

3.2 Principe de découplage approximatif des M machines ($M \geq 2$)

Notre principe de découplage approximatif des M machines M_1, M_2, \dots, M_M organisées en tandem, découle de l'intuition directe suscitée par la configuration des machines en série (voir Annexe II; figure 2). Dans la classe considérée des politiques décentralisées de production à seuils critiques, chaque machine $M_m (m=1, \dots, M)$ opère sous sa propre loi de commande à seuil critique Z_m constant. Le principe de découplage approximatif des machines est basé sur le fait qu'en dehors de la machine en tête M_1 desservie par un fournisseur parfaitement fiable, chaque machine $M_m (m=2, 3, \dots, M)$ perçoit sa source d'approvisionnement des encours en amont, comme un processus binaire $I_{x_{m-1}} > 0$ (fonction caractéristique de l'ensemble $X_{m-1} > 0$) supposé indépendant de l'état opérationnel de M_m . Par ailleurs, hormis la machine terminale M_M dont le taux de demande est constant et égal à d , l'environnement aval est vu par chaque machine $M_m (m=1, 2, \dots, M-1)$ comme un client dont le taux de demande d_m est stochastique. Après ce découplage approximatif des machines, suivi d'une markovianisation des processus de disponibilité des encours $I_{x_1} > 0, I_{x_2} > 0, \dots, I_{x_{M-1}} > 0$ (voir Annexe II; section 3.3), le lien entre chaque machine $M_m (m=2, 3, \dots, M)$ et l'univers en amont, est maintenu par les paramètres statistiques des processus de disponibilité $I_{x_{m-1}} > 0$ et $I_{x_{m-2}} > 0$ (voir figure 4,

Annexe II). À ce niveau, le défi qui reste à relever est celui du caractère stochastique des processus de demande des machines isolés équivalentes M_1, M_2, \dots, M_{M-1} . Nous y parviendrons avec l'aide de notre principe d'approximation par moyennage de la demande.

3.3 Principe d'approximation par moyennage de la demande

Dans le contexte de M machines en tandem, le principe d'approximation par *moyennage de la demande* stipule que, pour une fonction coût linéaire, le coût moyen de production encouru par chaque machine M_m ($m=1, 2, \dots, M-1$) est très proche du coût qui aurait pu être encouru par la même machine si le taux de demande stochastique effectif imposé par la machine M_{m+1} était remplacé par la moyenne à long terme de ce dernier. En définitive, du point de vue du calcul des coûts associés à M_m , c'est donc la moyenne du taux de demande stochastique a_m qui importe. Cette moyenne est exactement égale au taux constant d de demande des produits finis, à cause de la contrainte d'ergodicité (en effet, une condition nécessaire d'ergodicité est la stabilité des encours et produits finis).

L'application simultanée de nos deux principes au système de $M > 2$ machines en tandem nous amène (du point de vue du calcul des coûts de production encourus) à ne considérer seulement que *trois modèles de machines*. Cette démarche permet de maintenir la complexité d'analyse du système de production ainsi décomposé à un niveau traitable, même si le nombre de machines en tandem augmente.

3.4 Trois Modèles de machines

Au terme de l'application des principes de découplage des machines et de moyennage de la demande, et après markovianisation approximative à *deux états* (dimension minimale requise) des processus de disponibilité des encours, le système de

$M > 2$ machines en tandem se ramène à trois modèles de machines: une *machine en tête* M_1 de type *Hu* (source d'approvisionnement fiable, deux états markoviens, taux de demande constant, retards de livraison non permis), $M-2$ *machines intermédiaires* (M_2, M_3, \dots, M_{M-1}) de type *hybride* (source d'approvisionnement équivalente fiable, quatre états markoviens, taux de demande constant, retards de livraison non permis), et une *machine terminale* M_M de type *Sharifnia* (source d'alimentation fiable, quatre états markoviens, taux de demande constant, et retards de livraison permis).

Notre schéma d'optimisation généralisé découlera donc du calcul analytique des coûts associés à chaque type de machine isolée, et de l'optimisation du coût analytique global encouru dans l'espace admissible des $M-1$ seuils critiques Z_i ($i=1, 2, \dots, M-1$) (ou de $M-1$ coefficients de disponibilité a_i ($i=1, 2, \dots, M-1$), auquel cas les seuils critiques optimaux recherchés sont déduits des coefficients de disponibilité optimaux par un calcul direct (voir Annexe II; équations (14) et (16)).

Initialement, le coût de production J_1 de la machine en tête M_1 est une fonction analytique du paramètre de disponibilité a_1 (voir Annexe II; équation (13)). Par la suite, pour chaque machine M_m ($m=2, 3, \dots, M-1$), et pour un choix arbitraire des coefficients de disponibilité a_{m-1} et a_{m-2} avec $a_0=1$, le coût J_m associé à la machine M_m est exprimé comme fonction analytique de a_m sachant a_{m-1} et a_{m-2} (voir Annexe II; formule (15)). Enfin, le coût J_M associé à M_M est fonction de Z_M sachant a_{M-1} et a_{M-2} (voir Annexe II; formule (17)). Partant de la relation entre a_m et Z_m (voir Annexe II; formule (16)), pour $m=1, 2, \dots, M-1$, et considérant le seuil critique optimal $Z_M^*(a_{M-1}, a_{M-2})$ qui minimise J_M sachant a_{M-1} et a_{M-2} , alors le coût total résultant $J(a)$ où $a=(a_1, a_2, \dots, a_{M-1})^T$ n'est plus que fonction des paramètres de disponibilité a_1, a_2, \dots, a_{M-1} . Il suffit donc de minimiser $J(a)$ par rapport à a pour obtenir $a^*=(a_1^*, a_2^*, \dots, a_{M-1}^*)^T$ si un tel optimum existe, et d'en déduire les seuils critiques optimaux par un calcul direct (voir Annexe II; formule 16). D'où la version généralisée de notre schéma d'optimisation hiérarchisé qui suit.

3.5 Schéma général d'optimisation hiérarchisé pour machines en tandem

Notre schéma général d'optimisation hiérarchisé pour machines en tandem est caractérisé par les étapes suivantes (voir Annexe II; section 5);

- définir les paramètres des machines M_m ($m=1, 2, \dots, M$) en tandem (taux de pannes, taux de réparation, et capacités);
- fixer un coefficient de disponibilité a_1 pour le processus $I_{x_1} > 0$, a_0 étant égal à 1;
- utiliser le principe d'approximation par moyennage de la demande et le résultat de la *machine de type Hu* pour calculer le coût $J_1(a_1)$ (voir Annexe II; formule (13));
- pour $m=2, 3, \dots, M-1$, utiliser l'hypothèse d'indépendance des deux sous-systèmes découplés mono-machines M_{m-1} et M_m , et le modèle markovien approximatif à au moins deux états du processus $I_{x_{m-1}} > 0$, pour construire un modèle markovien approximatif à au moins quatre états de M_m (voir Annexe II; figure 4);
- utiliser les équations d'équilibre des flux de probabilité avec conditions appropriées aux frontières pour calculer le coût $J_m(a_{m-2}, a_{m-1}, a_m)$ connaissant a_{m-2} et a_{m-1} pour $m=2, 3, \dots, M$ (voir Annexe II; formule (15));
- utiliser la technique d'équilibre des flux de probabilité pour calculer le coût $J_M(a_{M-2}, a_{M-1}, Z_M)$ connaissant a_{M-2} et a_{M-1} (voir annexe II; formule (16));
- trouver le seuil critique optimal $Z_M^*(a_{M-2}, a_{M-1})$ qui minimise $J_M(a_{M-2}, a_{M-1}, Z_M)$;
- calculer le coût global $J(a_1, a_2, \dots, a_{M-1})$, puis optimiser par rapport aux paramètres jusqu'à trouver la solution optimale $a_1^*, a_2^*, \dots, a_{M-1}^*$;
- calculer les seuils critiques par: $Z_m^* = \text{Arg}(P_{om}(Z_m) = 1 - a_m^*)$, $m=1, 2, \dots, M-1$ et $Z_M^* = \text{Arg}(\text{Min}(J_m(a_{m-2}^*, a_{m-1}^*, Z_m)))$;

3.6 Applications et résultats

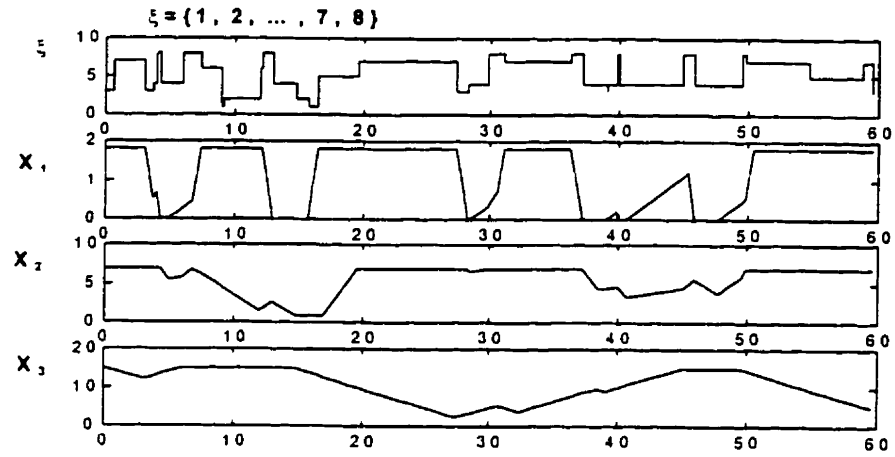
Le schéma d'optimisation hiérarchisé proposé a été testé et validé au moyen d'un simulateur généralisé de Monte-Carlo, sur un vaste échantillon de systèmes à trois machines organisées en tandem. L'organe central de ce simulateur est un *générateur de pannes markoviennes* étendu, que nous avons développé en augmentant la complexité du code source tel que développé pour la validation des résultats du chapitre 2. Pour un système de M machines M_1, M_2, \dots, M_M organisées en tandem, nous avons considéré le codage réciproque BCD (décimaux codés en binaire) entre le vecteur d'état conjoint $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_M)^T$ et l'ensemble décimal $\xi = \{1, 2, 3, \dots, 2^M\}$, où α_i représente l'état binaire marginal de la machine M_i ($i=1, 2, \dots, M$). Notre générateur étendu de pannes markoviennes est assisté par un module de codage automatique BCD ainsi qu'un module de génération automatique de la matrice d'intensité associée à ce code, pour n'importe quel nombre fini $M \geq 2$. Le simulateur de Monte-Carlo résultant nous permet de reproduire les trajectoires des états $\xi(t)$ et $x_i(t)$ où x_i représente le niveau d'encours ou surplus associé à la machine M_i ($i=1, 2, \dots, M$), ainsi que d'évaluer les performances correspondantes du système de production en tandem pour des seuils critiques arbitraires Z_1, Z_2, \dots, Z_M . Par exemple, dans le cas de trois machines en tandem ayant pour données $Z_1=1.8184$ (seuil critique en tête associé à M_1); $Z_2=6.89$ (seuil critique intermédiaire associé à M_2); $Z_3=14.99$ (seuil critique terminal associé à M_3); $k_1=2.5$ (capacité de M_1); $k_2=2.25$ (capacité de M_2); $k_3=2.0$ (capacité de M_3); $r_i=0.4$ (taux de réparation de M_i , $i=1, 2, 3$); $p_i=0.1$ (taux de pannes de M_i , $i=1, 2, 3$) et $d=1$ (demande), nous avons enregistré sur un intervalle de temps court (en vue d'une visualisation conviviale) deux exemples typiques de trajectoires des états $\xi(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$. Ces trajectoires sont illustrées à la figure 3.1. À la figure 3.2, on remarque la convergence sur un horizon assez long des coûts moyens correspondants J_1 , J_2 et J_3 pour les cinq réalisations distinctes enregistrées dans chaque cas. C'est ainsi que fonctionne l'environnement de Monte Carlo qui nous a permis de tester les performances prédites des lois de commande décentralisées à seuils critiques, elles-mêmes issues de notre schéma généralisé d'optimisation hiérarchisé pour machines en tandem.

Les résultats prédits par notre approche d'optimisation pour un vaste échantillon de systèmes à trois machines organisées en tandem, et ceux estimés dans l'environnement de Monte-Carlo étendu ci-dessus présenté, sont illustrés et comparés (voir Annexe II; tableau 2, figure 5). Les principales observations qui se dégagent de ces résultats se résument comme suit:

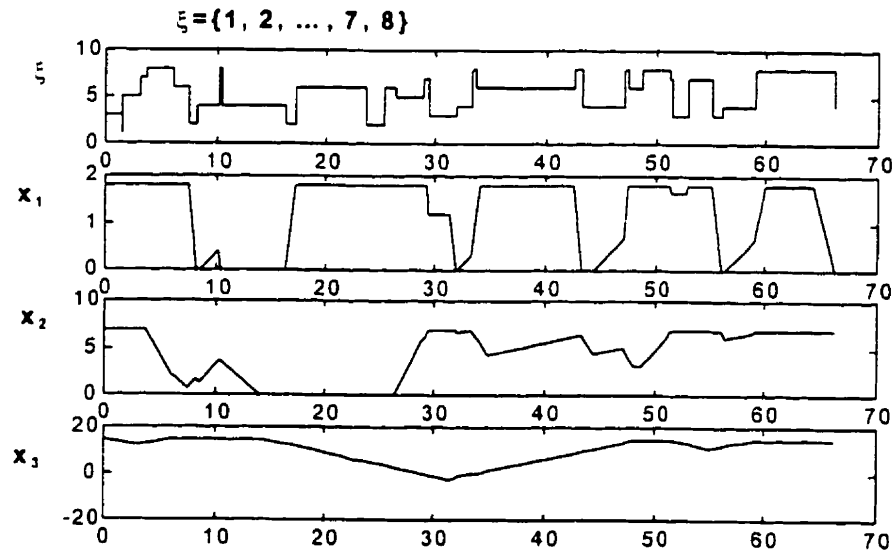
- l'espace des seuils critiques Z_m ($m=1, 2, \dots, M-1$), est équivalent à l'espace des coefficients de disponibilité $a=a_1, a_2, \dots, a_{M-1}$ des encours;
- notre principe de moyennage de la demande est extrêmement précis (voir Annexe II; tableau 2,);
- le premier moment du temps de premier passage à zéro des encours permet d'obtenir un modèle markovien approximatif raisonnable d'ordre quatre de chaque machine M_m ($m=2, \dots, M-1$). Il s'agit là du niveau d'approximation le plus grossier.
- le coût global semble systématiquement être une fonction convexe du paramètre vectoriel de disponibilité \mathbf{a} , mais la preuve mathématique de cette propriété de convexité si elle est vraie, demeure à établir (voir Annexe II; figure 5);
- les performances prédites par notre schéma d'optimisation hiérarchisé se rapprochent, même sous les approximations markoviennes les plus grossières, de celles obtenues par simulations de Monte-Carlo (sous la même classe de politiques de production) sur le système couplé original de machines en tandem (voir Annexe II; tableau 2);
- dans un environnement largement inférieur au standard actuel (Pentium 200 Mhz), la version Matlab de notre schéma d'optimisation hiérarchisé pour trois machines tourne très rapidement, et le temps requis pour l'obtention de l'optimum est de quelques secondes seulement si notre procédure d'initialisation est utilisée (voir Annexe II; section 5.3). Ce dernier constat nous amène à la conclusion de ce chapitre.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, l'extension des principes d'approximation par découplage de machines et moyennage de la demande, la markovianisation hautement simplifiée à deux états des processus des encours conduisant à des modèles markoviens approximatifs de dimension minimale (quatre états - cas le plus défavorable) pour machines isolées, ainsi que l'analyse des coûts à partir de l'écriture des équations d'équilibre des flux de probabilité, sont autant d'outils qui nous ont permis de transformer l'analyse du problème complexe de $M > 2$ machines en tandem, en celle de trois types de sous-problèmes mono-machines dont deux standards associés respectivement aux machines en tête M_1 et terminale M_M , et l'un associé à la machine intermédiaire non standard M_m ($m=2, 3, \dots, M-1$). Cette démarche a permis d'aboutir à la version généralisée de notre schéma d'optimisation hiérarchisé. Les bornes inférieures des performances qui en résultent, testées sur un large échantillon de systèmes à trois machines organisées en tandem dans les cas *d'approximations markoviennes les plus grossiers*, se sont avérées acceptables. Nous pensons que les résultats obtenus peuvent être grandement améliorés au niveau de la machine terminale M_3 , en raffinant la markovianisation du processus de disponibilité Ix_2 (4 états au lieu de deux), ce qui reviendrait à considérer une machine équivalente M_3 ayant *huit états markoviens*.



Trajectoires des états $\xi(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$: Exemple 1



Trajectoires des états $\xi(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$: Exemple 2

Figure 3.1: Exemples de réalisations de $\xi(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$

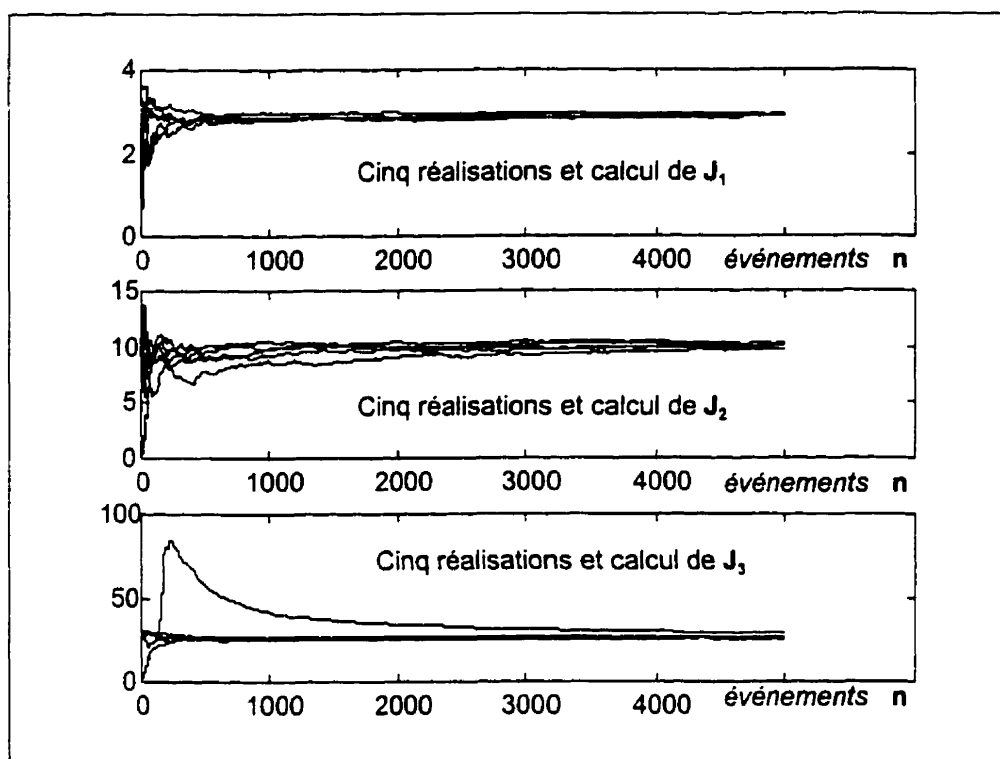


Figure 3.2: Convergence des coûts moyen de production J_1 , J_2 et J_3 pour les cinq réalisations enregistrées dans chaque cas.

CHAPITRE 4

EXPLORATION NUMÉRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES LOIS DE COMMANDE DÉCENTRALISÉES DE LA PRODUCTION À SEUILS CRITIQUES

Dans ce chapitre, les propriétés de la classe sous-optimale des politiques de production à *seuils critiques*, pour machines organisées en tandem seront explorées à la fois par voie de calcul (en utilisant les algorithmes développés lors de cette étude) et par voie de simulations de Monte-Carlo. Notre étude portera sur les propriétés suivantes:

- robustesse en performance du principe d'approximation par moyennage de la demande lors de variations de d ;
- robustesse en performance du principe d'approximation par moyennage de la demande lors de variations des paramètres statistiques des machines;
- influence des valeurs relatives des coûts d'inventaire sur les caractéristiques de la fonction coût global;
- invariance de la solution optimale pour $k_i \geq k_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, M-1$);
- allure des performances optimales en fonction des taux de réparation des machines;
- allure des performances optimales en fonction des valeurs de c_i ;
- sous-optimalité des lois de production décentralisées à seuils critiques

4.1 Robustesse en performance du principe d'approximation par moyennage de la demande lors des variations de d

Les résultats des chapitres précédents (voir Annexe I, tableau A.3.1) indiquent déjà que la haute qualité du principe d'approximation par moyennage de la demande, se

conserve lors des variations du taux de demande (noté d) des produits finis. L'extension des simulations à d'autres valeurs de d nous amène ici aux mêmes conclusions, la seule contrainte à satisfaire dans le choix de d étant celle d'ergodicité.

Dans le cas d'un système de deux machines en tandem (M_1, M_2), nous avons comparé les coûts prédits sous ce principe (obtenus avec l'aide de notre schéma d'optimisation développé au chapitre 2) et ceux estimés (obtenus par simulations de Monte Carlo) associés à la machine M_1 en considérant les données suivants: $Z_1=Z_2=5$; $k_1=2.5$, $k_2=2.4$, $r_1=0.3$, $r_2=0.3$, $p_1=p_2=0.1$, $c_1=2$, et $d=[0.2 \ 1.5]$. Les résultats obtenus sont illustrés à la figure 4.1.1. On y remarque la grande similarité entre les coûts $J_1(d)$ prédits et ceux estimés par voie de simulation.

Dans le cas d'un système de $M>2$ machines en tandem, désignées de l'amont vers l'aval par (M_1, M_2, \dots, M_M), les simulations confirment également le fait que pour n'importe quelle valeur constante du taux de demande terminale d garantissant l'ergodicité du processus de production en tandem, tout se passe du point de vue du calcul des coûts, comme si vues de chaque machine M_m ($m=2, 3, \dots, M-1$), toutes les machines (M_{m+1}, \dots, M_M) en aval étaient transparentes vis-à-vis du taux requis de produits finis. Cependant, rappelons que le calcul des coûts associés aux machines (M_2, M_3, \dots, M_M) est aussi affecté par d'autres sources d'erreurs (découplage approximatif des machines, markovianisation). Il est donc plus raisonnable de tester rigoureusement la robustesse (vis-à-vis de la variation du taux de demande des produits finis) du principe d'approximation par moyennage de la demande au niveau de la machine en tête M_1 , qui opère à l'abri des autres sources d'approximation. Plus concrètement, considérons un exemple typique de trois machines en tandem (M_1, M_2, M_3) ayant pour données: $k_1=2.5$, $k_2=2.4$, $k_3=2$, $r_1=r_2=r_3=0.3$, $p_1=p_2=p_3=0.1$, $d=\text{variable}$ et $c_1=2$. Notons dans ce cas que la machine en tête M_1 du système (M_1, M_2, M_3) est identique à celle du système (M_1, M_2) considéré dans les calculs précédents.

La figure 4.1.2 (p.147) illustre la comparaison des coûts prédits (obtenus à l'aide de la version généralisée de notre schéma d'optimisation développé au chapitre 3) et ceux estimés (obtenus par notre simulateur généralisé de Monte Carlo) associés à la machine entête M_1 du système (M_1, M_2, M_3) . Comme résultat (figure 4.1.2), les coûts $J_1(d)$ prédits et estimés encourus par M_1 dans le système (M_1, M_2, M_3) sont similaires, et sont pratiquement les mêmes que ceux obtenus dans le système (M_1, M_2) (figure 4.1.1, p.147).

Donc, tant que les conditions d'ergodicité du système de production en tandem sont satisfaites, la haute qualité du principe approximatif de transparence des machines sous les règles de production à seuils critiques décentralisés, ne semble pas être affectée par les valeurs considérées pour le taux de demande des produits finis.

4.2 Robustesse en performance du principe d'approximation par moyennage de la demande lors de la variation des paramètres statistiques des machines en aval

L'une des propriétés non triviales du principe d'approximation par moyennage de la demande est la robustesse vis-à-vis des changements des paramètres statistiques des machines M_{m+1}, \dots, M_M situées en aval de n'importe quelle station d'observation (machine M_m ($m=1, 2, \dots, M-1$)). En utilisant la technique de Monte-Carlo, nous avons estimé pour différentes valeurs des taux de réparation des autres machines (situées en aval de M_1), les coûts de production encourus au niveau de la machine en tête M_1 d'un système de fabrication en tandem. Notre objectif étant de comparer ces coûts estimés à celui de la même machine opérant isolément M_1 (*machine de type Hu* (1995-a)). Notons que le choix de la machine M_1 comme cible unique de test de la propriété de robustesse considérée est justifié par le fait que son analyse n'est pas affectée par une approximation markovienne, auquel cas on peut dans ces conditions évaluer

rigoureusement les erreurs d'approximation dues au principe d'approximation par moyennage de la demande. En vue d'atteindre ce but, les cas suivants sont examinés:

- deux machines en tandem (M_1, M_2) de paramètres: $Z_1=Z_2=5$, $k_1=2.5$, $k_2=2.4$, $r_1=0.3$, $p_1=p_2=0.1$, $d=1$, $c_1=2$, et $r_2=r$ variable;
- trois machines en tandem (M_1, M_2, M_3) de paramètres: $Z_1=Z_2=Z_3=5$, $k_1=2.5$, $k_2=2.4$, $k_3=2$, $r_1=0.3$, $p_1=p_2=p_3=0.1$, $r_2=r_3=r$ variable, $d=1$ et $c_1=2$.

Remarquons que la machine en tête M_1 est la même pour les trois cas considérés ci-dessus, et que vues de M_1 , les machines en aval (M_2 pour le système (M_1, M_2) , et M_2 et M_3 pour le système (M_1, M_2, M_3)) sont caractérisées par un taux de réparation variable $r \in [0.3 \text{ } 1.5]$.

Les résultats obtenus pour le cas du système de deux machines en tandem (M_1, M_2) sont représentés à la figure 4.2 (p.148). On observe sur la figure 4.2.1 que sur un horizon suffisamment large, les trajectoires du coût $J_1(\xi, r)$ associées à l'état initial arbitraire ξ du générateur de pannes markoviennes et pour des valeurs particulières de $r = r_2$, convergent vers une limite estimée notée $J_1(r)$, obtenue à l'aide du simulateur de Monte-Carlo. Cette limite estimée $J_1(r)$ pour diverses valeurs de $r = r_2$ est très proche du coût prédit $J_{1HU}=8.10$ pour la même machine M_1 opérant isolément (*machine de type Hu*, 1995-a). L'allure complète du coût estimé $J_1(r)$ en fonction de $r = r_2$ correspond à la figure 4.2.2. Le plus grand écart obtenu entre le coût estimé $J_1(r)$ et le coût prédit J_{1HU} est observé pour $J_1(r)=7.7$, et l'erreur relative maximale enregistrée est de 4.9 %.

La figure 4.3 (p. 149) indique les résultats obtenus dans le cas de trois machines en tandem (M_1, M_2, M_3). On note sur la figure 4.3.1 qu'une réalisation quelconque du coût $J_1(\xi, r)$ associée à l'état initial arbitraire ξ du générateur de pannes markoviennes et pour une valeur particulière de $r=r_2=r_3$, converge vers une limite estimée notée $J_1(r)$, obtenue à l'aide du simulateur de Monte-Carlo. Cette limite estimée $J_1(r)$ est également très proche du coût prédit $J_{1HU}=8.10$. L'allure complète de $J_1(r)$ en fonction de $r=r_2=r_3$

correspond à la figure 4.3.2 où le plus grand écart noté entre le coût estimé $J_1(r)$ et le coût prédit J_{IHU} se manifeste pour $J_1(r) = 7.67$, ce qui procure une erreur relative maximale de 5.31 %. Ces résultats confirment bien la propriété de robustesse du principe d'approximation par moyennage de la demande lors des variations du taux de réparation de la machine M_2 installée en aval.

4.3 Influence des valeurs relatives des coûts d'inventaire sur les caractéristiques de la fonction coût global

Les échantillons de machines en tandem étudiés aux chapitre 2 et 3 nous ont permis de noter que le coût global de production semble en général être une fonction convexe des coefficients de disponibilité des encours. Les résultats numériques obtenus ici indiquent que les rapports c_1/c_2^+ et $c_1/\min(c_2^+, c_3^+)$, respectivement dans les cas de deux et trois machines en tandem, ont une influence directe sur la position du minimum à l'intérieur de la région de l'espace de coefficients de disponibilité d'encours admissibles.

Pour le cas de deux machines en tandem les résultats sont présentés à la figure 4.4 (p. 150). Ces résultats correspondent au cas où les deux machines ont pour paramètres: $k_1=2.5$, $k_2=2$, $p_1=p_2=0.1$ et $r_1=r_2=0.4$, et $d=1$, $c_2^+=4$, $c_2^-=10$, et $c_1 \in [0.5, 1, 2, 2.5, 3]$ = variable. Nous constatons sur la figure 4.4.1 que le coût global aura toujours un minimum qui est un point stationnaire. Dans le cas où $c_1=c_2^+$, nous détectons dans la fonction coût une zone importante d'insensibilité indiquant que *des échanges d'inventaires entre les deux machines auraient sensiblement les mêmes effets globaux*. Cependant un point stationnaire existe. Finalement, pour c_1 suffisamment plus grand que c_2^+ (voir figure 4.4.2), l'optimum tend vers la limite de la région d'ergodicité indiquant que l'inventaire associé à la machine M_1 devient de plus en plus petit.

Il faut noter d'autre part que Sethi et Zhang (1994) ont montré que dans le cas de deux machines en tandem, la classe des lois de production kanban *n'est pas asymptotiquement optimale* si $c_1 > c_2$ (la limite asymptotique étant associée à des taux de changement d'état de plus en plus rapides).

Nous observons les mêmes phénomènes pour un système typique de trois machines en tandem, ayant pour paramètres: $k_1=2.5$; $k_2=2.25$, $k_3=2$, $d=1$, $r_1=r_2=r_3=0.4$; $p_1=p_2=p_3=0.1$ et $c_2=2$, $c_3^+=4$, $c_3^-=10$ et $c_1=[0.5, 1, 2, 3]$. Les résultats obtenus (figure 4.5, p. 151) indiquent que pour $c_1 \leq \min(c_2, c_3^+)$ (figure 4.5.1), le coût global $J(a_1, a_2)$ est "fortement" convexe. Par contre, si $\min(c_2, c_3^+) < c_1 < \max(c_2, c_3^+)$, alors $J(a_1, a_2)$ est "faiblement" convexe. Finalement si $c_1 > \max(c_2, c_3^+)$ (figure 4.5.2), le point stationnaire optimum, tend vers la limite de la région de recherche admissible (imposée par les contraintes d'ergodicité).

4.4 Invariance de la solution optimale pour $k_i \geq k_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, M-1$)

Les résultats du calcul numérique montrent que la solution optimale prédite par notre algorithme est invariante tant que $k_i > k_{i+1}$ pour $i=1, 2, \dots, M-1$, et correspond à celle de la capacité d'équilibre $k=k_M=\min(k_i)$, $i=1, 2, \dots, M$. La figure 4.6 (p. 152) correspond au cas d'un système typique de deux machines (M_1, M_2) ayant pour paramètres $d=1$; $k=k_1=\text{variable}$; $k_2=2$; $p_1=0.1$; $r_1=0.3$; $p_2=0.1$; $r_2=0.3$; $c_1=2$; $c_2^+=2$; et $c_2^-=10$. On observe clairement sur la figure 4.6.1 l'intéressante propriété d'invariance de la solution optimale vis-à-vis de l'augmentation des valeurs de la capacité k_1 de la machine en amont, ainsi que le comportement intuitif de monotonocité des coûts en fonction de $1/k_1$; ce qui n'est pas sans rappeler les propriétés de décroissance monotone des seuils critiques avec la capacité de production établie pour machines individuelles (voir Liberopoulos et Hu, 1995). La figure 4.6.2 illustre bien l'allure constante des performances optimales lorsque le paramètre $k=k_1$ augmente.

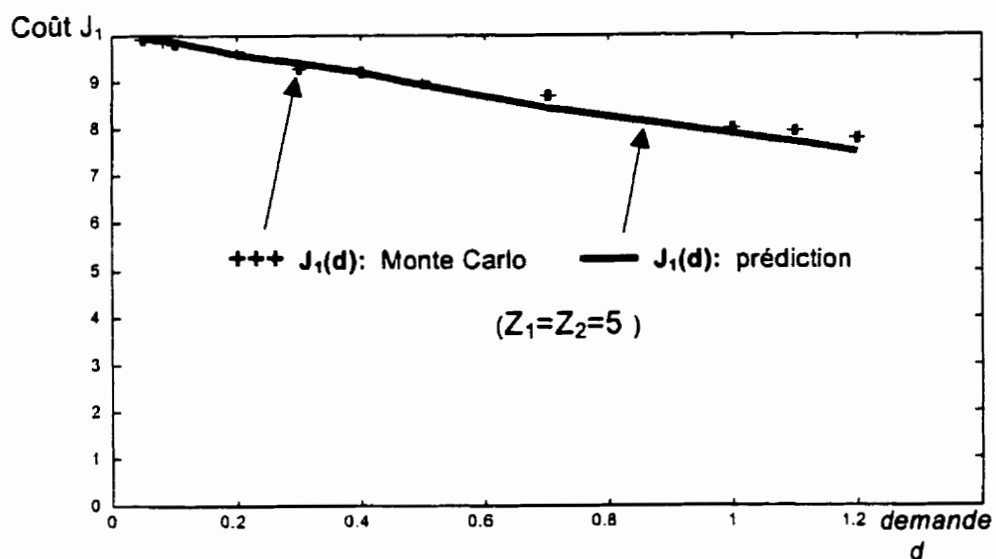


Figure 4.1.1 (cas de deux machines en tandem)

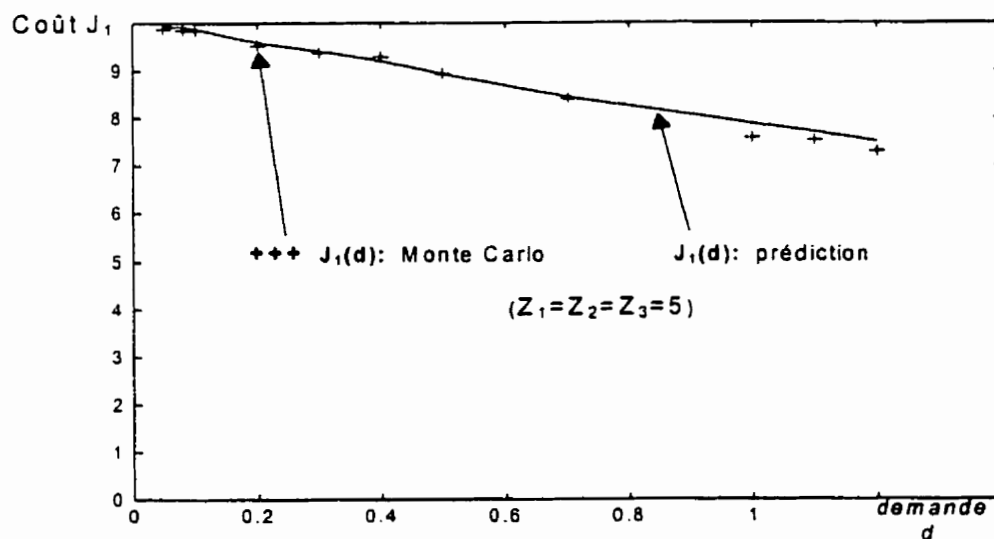


Figure 4.1.2 : cas de trois machines en tandem

Figure 4.1: Maintien de la qualité du principe d'approximation par moyennage de la demande lors de variations du paramètre de demande d

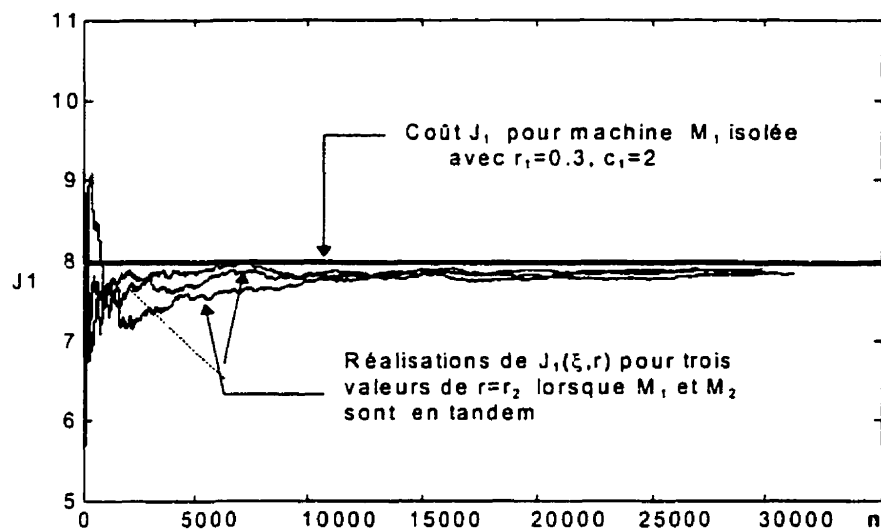


Figure 4.2.1: Convergence des réalisations du coût $J_1(\xi, r)$

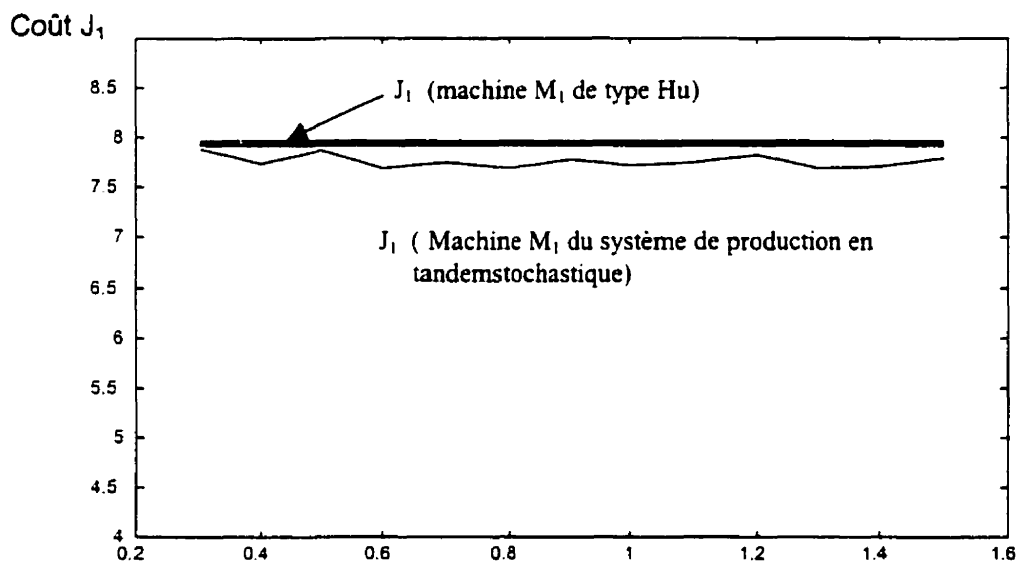


Figure 4.2.2: Allure du coût $J_1(r)$ en fonction de r

Figure 4.2: Robustesse en performance du principe de moyennage de la demande lors de variations des paramètres statistiques des machines en aval (cas du système (M_1, M_2))

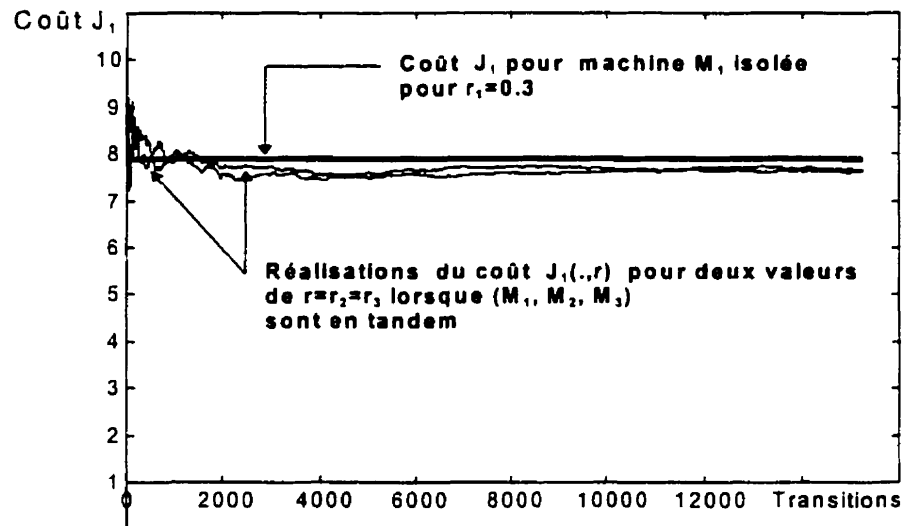


Figure 4.3.1: Convergence des réalisations du coût $J_1(\xi, r)$

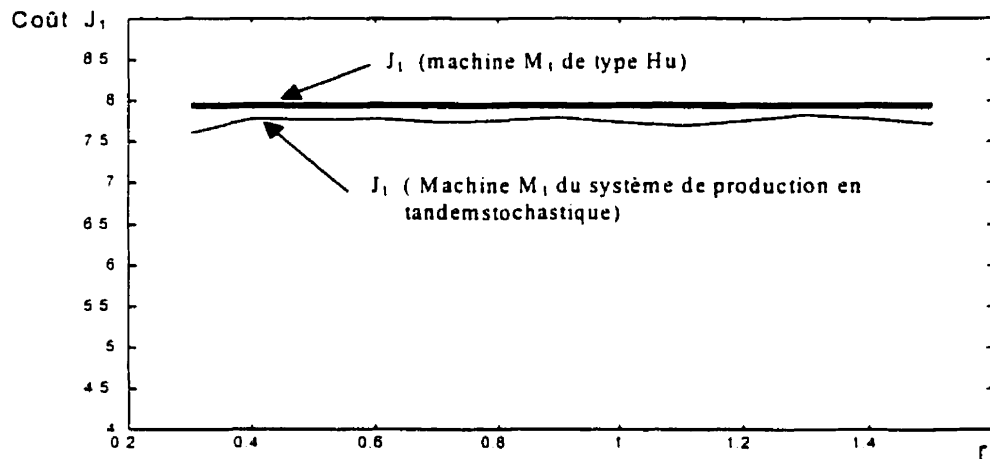


Figure 4.3.2: Allure du coût $J_1(r)$ en fonction de r

Figure 4.3: Robustesse en performance du principe de moyennage de la demande lors de variations des paramètres statistiques des machines en aval (cas du système (M_1, M_2, M_3))

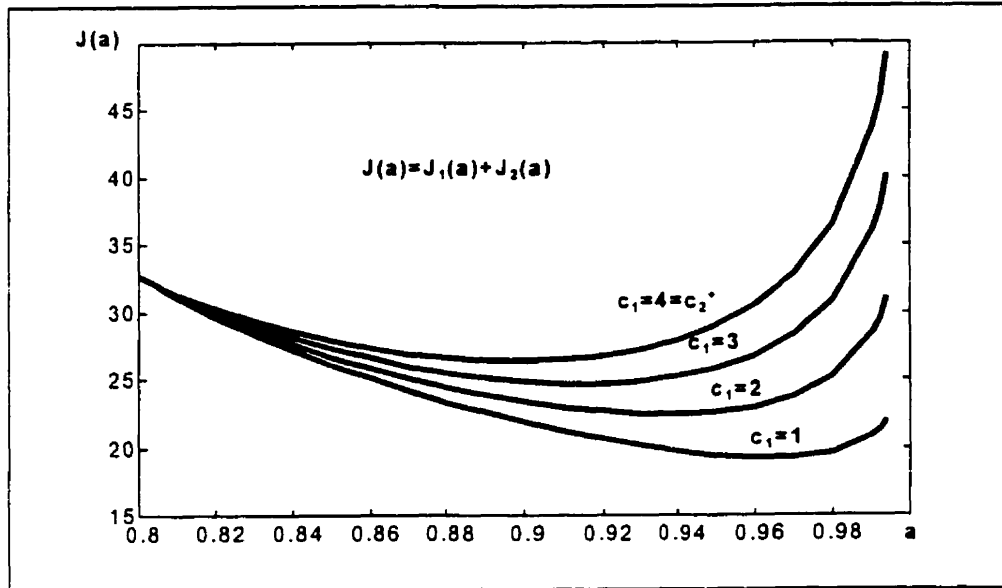


Figure 4.4.1: Effet du paramètre c_1 sur la convexité de $J(a)$:
cas de deux machines: $c_1 \leq c_2^*$

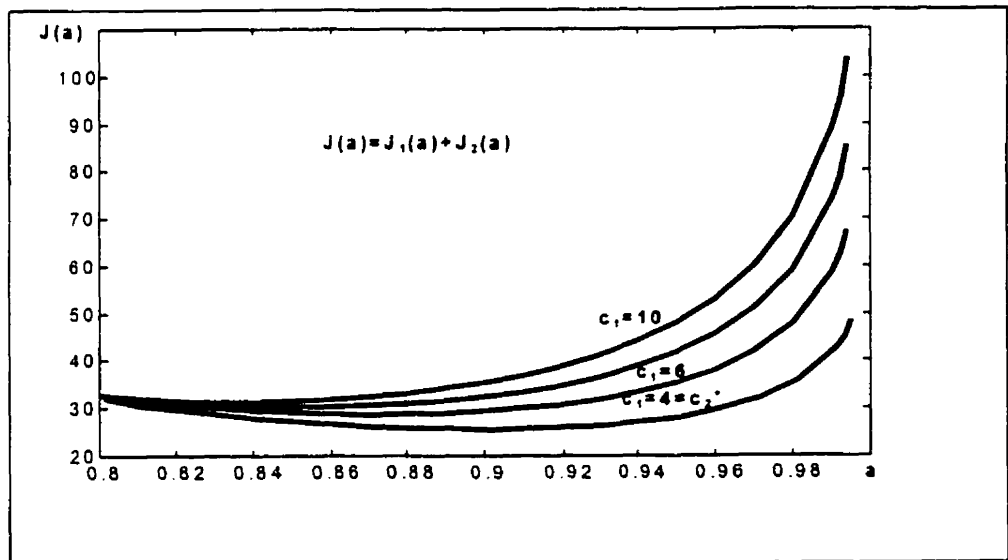


Figure 4.4.2: Effet du paramètre c_1 sur la convexité de $J(a)$:
cas de deux machines: $c_1 > c_2$

Figure 4.4: Effet du paramètre c_1 sur la convexité de $J(a)$:
cas du système (M_1, M_2)

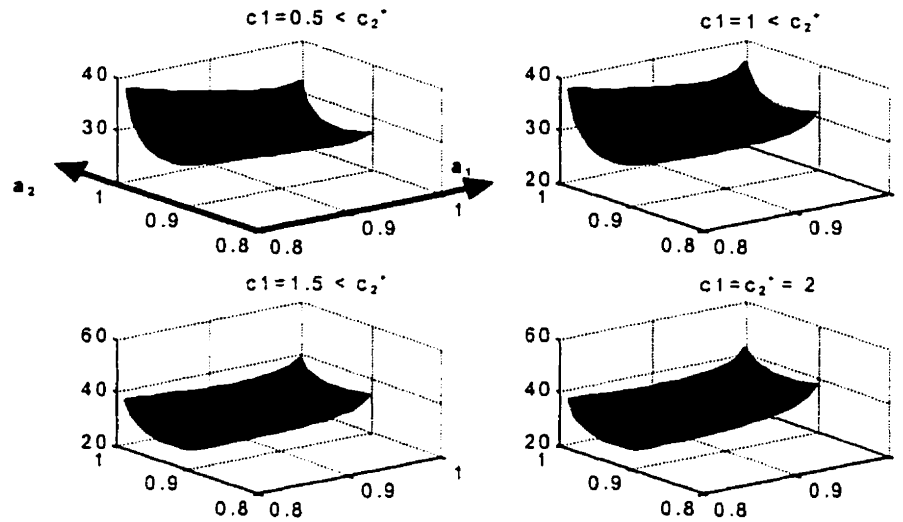


Figure 4.5.1: Effet du paramètre c_1 sur la convexité de $J(a)$:
cas de trois machines: $c_1 \leq \min(c_2, c_3^*)$

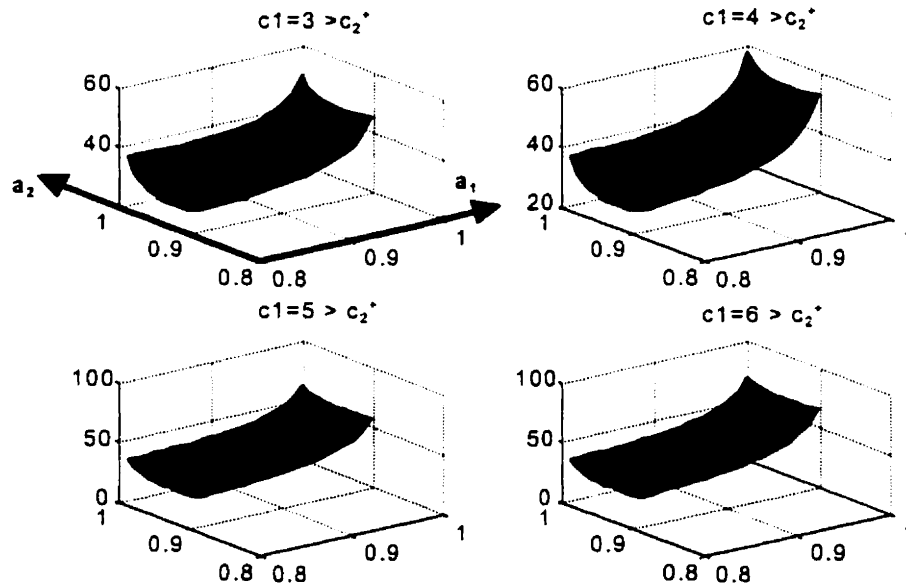


Figure 4.5.2: Effet du paramètre c_1 sur la convexité de $J(a)$:
cas de trois machines: $c_1 > \min(c_2, c_3^*)$

Fig. 4.5: Effet du paramètre c_1 sur la convexité de $J(a)$:
cas du système (M_1, M_2, M_3)

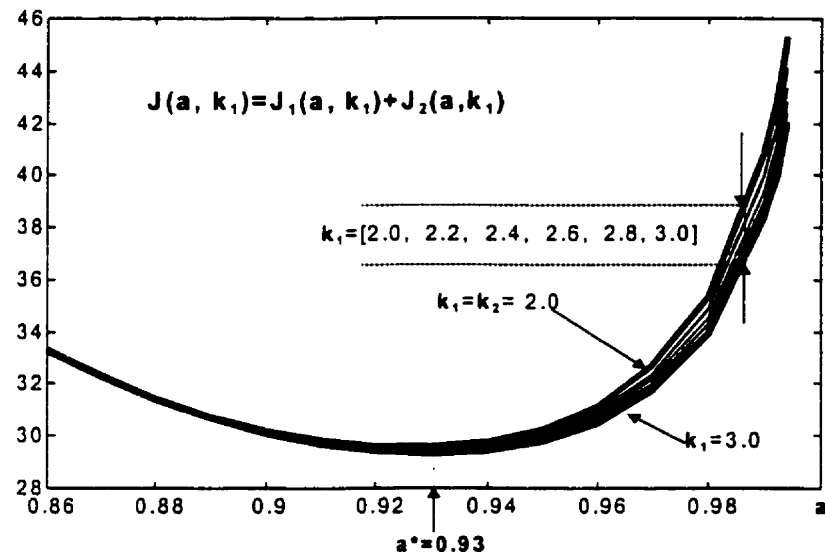


Figure 4.6.1: Invariance de l'optimum $k_1 \geq k_2$ (exemple 1)

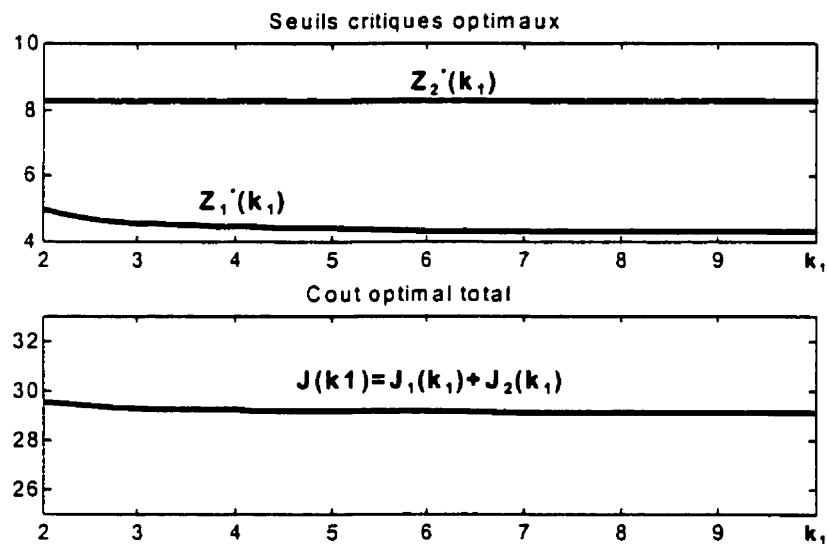


Figure 4.6.2: Invariance de l'optimum pour $k_1 \geq k_2$ (exemple 2)

Figure 4.6: Invariance de l'optimum pour $k = k_1$ (cas du système (M_1, M_2))

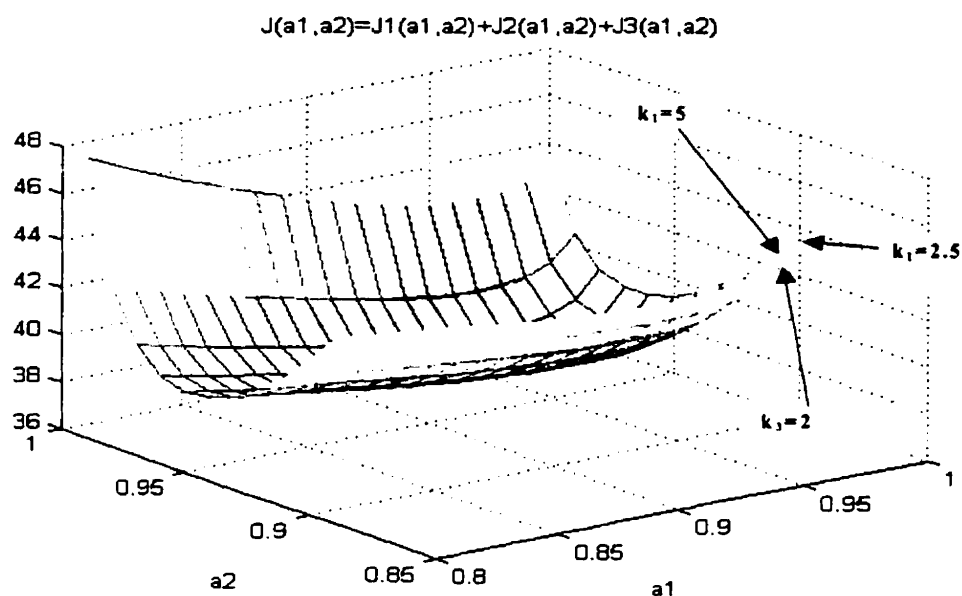


Figure 4.7.1: Invariance de l'optimum pour $k_1 = k \geq k_2$

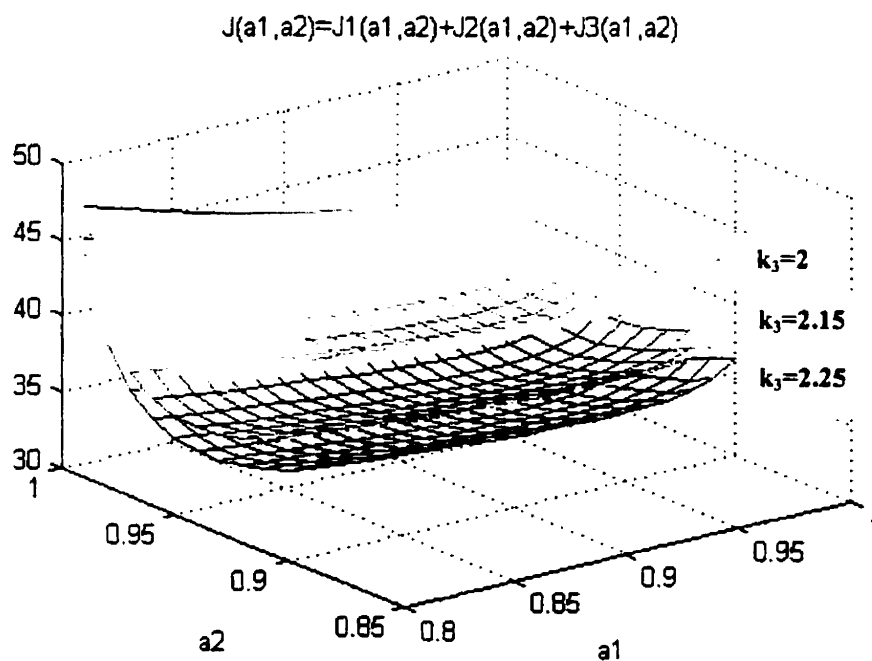


Figure 4.7.2: Invariance de l'optimum pour $k_1 \geq k_2 \geq k_3 = k$

Figure 4.7: Invariance de l'optimum pour $k = k_1$ et $k = k_3$ ((cas du système M_1 , M_2 et M_3))

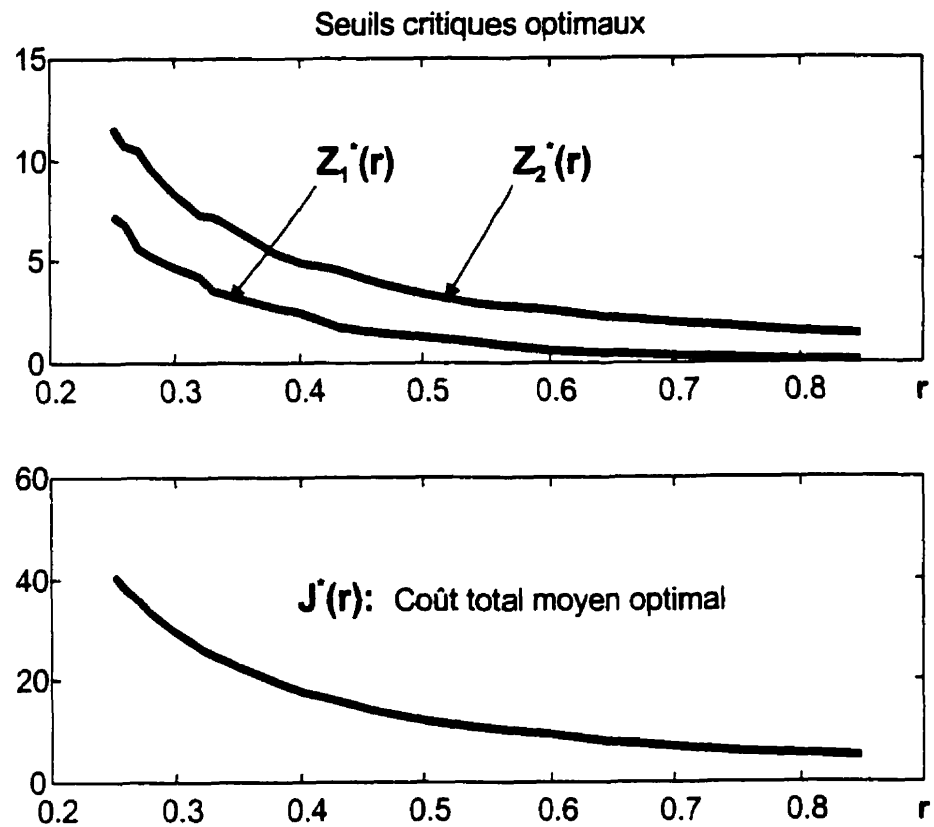


Figure 4.8: Allure des performances optimales lorsque le taux de réparation des machines varie

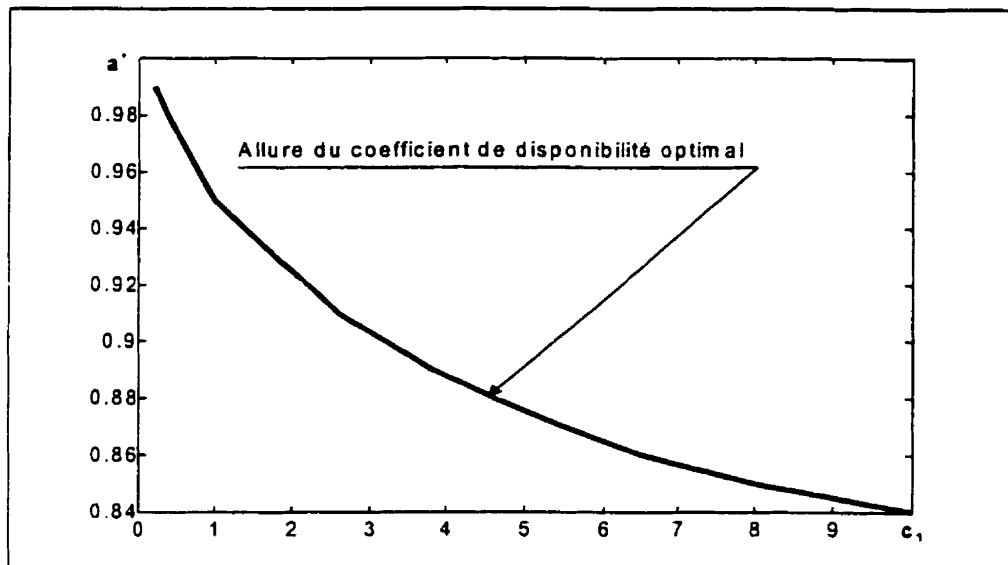


Figure 4.9.1: allure du coefficient de disponibilité optimal en fonction de c_1 :
cas de deux machines avec $c_2^+ = 2$ et $c_2^- = 10$

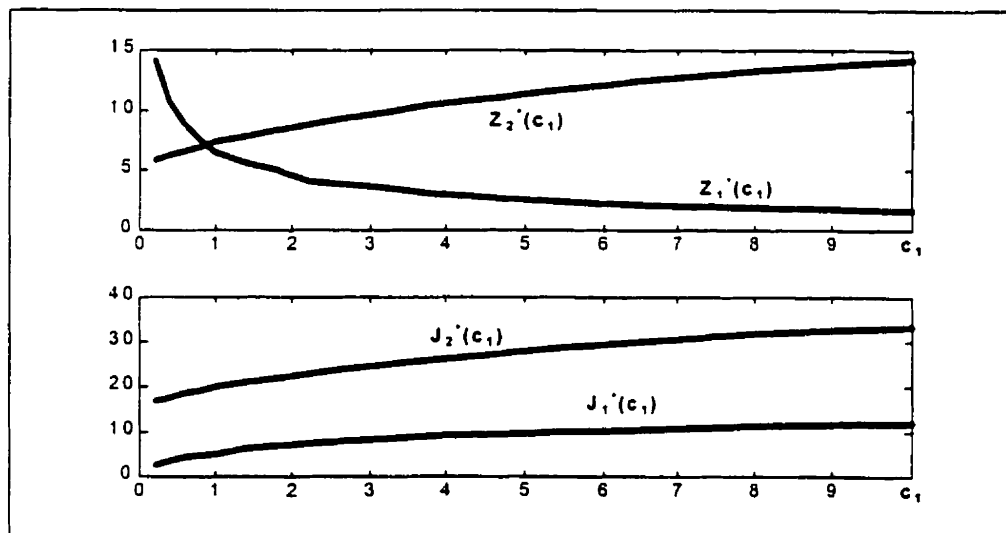


Figure 4.9.1: Allure des seuils critiques et des coûts optimaux en fonction de c_1 :
(cas de deux machines avec $c_2^+ = 2$ et $c_2^- = 10$)

Figure 4.9: Allures des caractéristiques optimales en fonction de c_1 :
cas du système (M_1, M_2) avec $c_2^+ = 2$ et $c_2^- = 10$

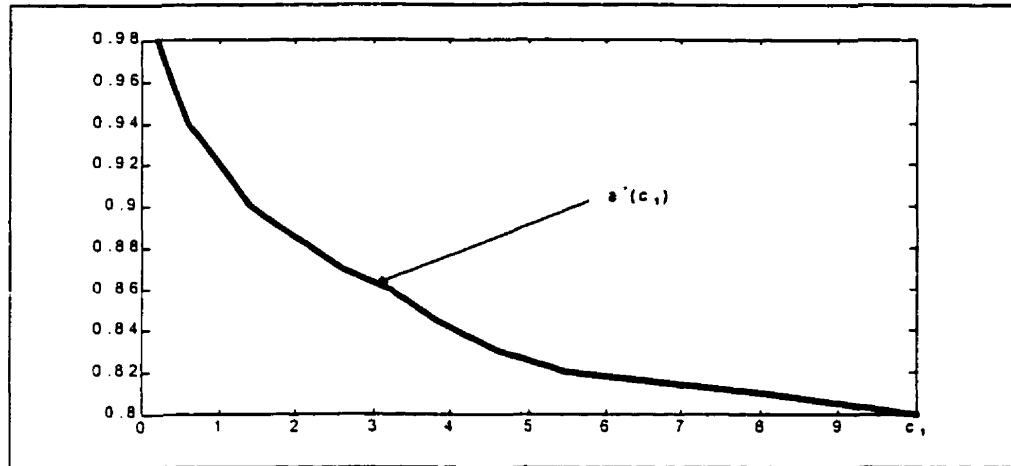


Figure 4.10.1: allure du coefficient de disponibilité optimal en fonction de c_1 :
(cas de deux machines avec $c_2^+ = c_2^- = 2$)

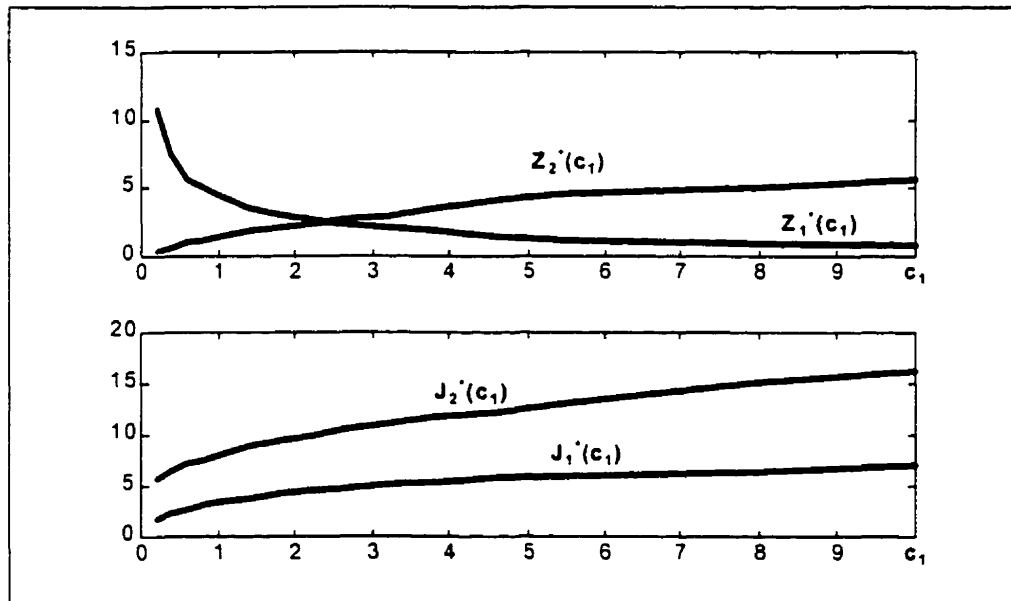


Figure 4.10.2: Allure des seuils critiques et des coûts optimaux en fonction de c_1 :
(cas de deux machines avec $c_2^+ = c_2^- = 2$)

Figure 4.10: Allures des caractéristiques optimales en fonction de c_1 :
(cas du système (M_1, M_2) avec $c_2^+ = c_2^- = 2$)

Cette propriété d'invariance apparaît aussi sur la figure 4.7 (p.153) correspondant à un système de trois machines en tandem (M_1, M_2, M_3) ayant pour paramètres; $r_1=0.3$; $p_1=0.1$; $c_1=0.5$; $k_2=2.25$; $r_2=0.3$; $p_2=0.1$; $c_2=2$; $k_3=2$; $r_3=0.3$; $p_3=0.1$; $d=1$; $c_3^+=4$; $c_3^-=10$. En variant les capacités k_1 (figure 4.7.1) et k_3 (figure 4.7.2) on note que l'allure du coût total est susceptible de changer, mais l'optimum cherché reste presque invariant.

Donc, du point de vue de l'optimalité, *les écarts entre les capacités des machines en tandem opérant sous des lois décentralisées de production à seuils critiques* ne sont pas nécessaires, en autant que les machines aient des statistiques de fiabilité équivalentes. C'est de fait le maillon le plus faible de la chaîne qui limite les performances optimales globales.

4.4 Allure des performances optimales en fonction du taux de retour de réparation des machines

Les résultats du calcul numérique indiquent qu'une augmentation du taux de retour de réparation des machines entraîne une diminution des seuils critiques ainsi que des coûts optimaux correspondants. Ce résultat intuitivement prévisible est confirmé par la courbe de la figure 4.8 (p. 154) obtenue en utilisant les données $d=1$; $k_1=2.5$; $k_2=2$; $p_1=0.1$; $r_1=r_2=\text{variable}$; $p_2=0.1$; $c_1=2$; $c_2^+=2$; $c_2^-=10$ (cas de deux machines en tandem). L'information principale qui se dégage de ce résultat est la convergence des seuils critiques optimaux ainsi que du coût total vers zéro lorsque r augmente indéfiniment.

4.6 Allure des performances optimales en fonction de c_1

Compte tenu du fait que le paramètre c_1 de pénalisation des encours en tête a une grande influence sur la position de l'optimum, nous avons été amenés à étudier l'allure des performances optimales en fonction de c_1 . Nous avons considéré le cas d'un

système de deux machines en tandem ayant pour paramètres $k_1=2$, $k_2=2$, $r_1=r_2=0.3$, et $p_1=p_2=0.1$. Les résultats obtenus pour $c_2^+=2$ et $c_2^-=10$ sont représentés à la figure 4.9 (p. 155), et la figure 4.10 (p. 156) correspond au cas où $c_2^+=c_2^-=2$. Il convient de noter, dans les deux cas, que toutes les caractéristiques optimales (coefficients de disponibilité optimaux $a^*(c_1)$ (voir figures 4.9.1 et 4.9.2), seuils critiques optimaux $Z_i^*(c_1)$ et coûts optimaux $J_i^*(c_1)$, $i=1, 2$ (voir figures 4.9.2 et 4.10.2) sont des fonctions monotones de c_1 . Ces résultats indiquent qu'un seuil critique optimal $Z_1^*(c_1)$, ou encore un coefficient de disponibilité optimal $a^*(c_1)$ plus faible (ou plus grand) est requis pour une augmentation (ou diminution) du paramètre c_1 . Par ailleurs, une diminution de $a^*(c_1)$ liée à une augmentation de c_1 se traduit en amont par un faible taux d'augmentation du coût optimal $J_1^*(c_1)$. Du côté aval, une diminution de $a^*(c_1)$ a une incidence directe sur la dégradation des caractéristiques de fiabilité de la machine M_2 ; ce qui entraîne une augmentation du coût $J_2^*(c_1)$. On remarque enfin sur la figure 4.10.2 que $J_1^*(c_1) < J_2^*(c_1)$ et qu'au point c_1 tel que $c_1=c_2^+=c_2^-=2$, on a $Z_1^*(c_1) > Z_2^*(c_2)$.

Ces résultats s'expliquent par le fait que les caractéristiques de fiabilité de la machine M_2 installée en aval sont influencées par celles de la machine M_1 située en amont via le processus de disponibilité des encours en tête.

4. 7 Sous-optimalité des lois de commande décentralisées à seuils critiques pour machines en tandem

Tout au long de cette thèse nous nous sommes concentrés sur le problème d'optimisation du flux à l'intérieur de la classe des politiques de production décentralisées à seuils critiques. Les sections précédentes (4.1 à 4.6) de ce chapitre nous ont permis d'explorer les propriétés et caractéristiques optimales associées à cette classe intéressante de lois de commande pour machines en tandem. Dans cette section, nous allons comparer les performances optimales issues de la classe des lois de

production décentralisées à seuils critiques, avec les solutions optimales asymptotiques des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) associées à un processus d'optimisation (avec fonction coût actualisé) pour lequel le coefficient d'actualisation est suffisamment faible. Cette approche asymptotique d'optimisation numérique d'un problème initial avec coût moyen (voir Annexe 2, équations (3-4)) est fondée sur les résultats de Colonius (1989) et Wirth (1993)) qui se résument comme suit:

Considérons la famille $\mathfrak{I}(\rho)$ ($0 < \rho < 1$) des processus d'optimisation définie par:

$$\mathfrak{I}(\rho) : \quad \text{Min}(V_\rho(x, u)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} h(x(t), u(t)) dt \quad (4.1)$$

où ρ = coefficient d'actualisation, et:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); \quad (4.2)$$

$x(t)$ = vecteur d'état de dimension n ;

$u(t)$ = vecteur de commande de dimension m ;

$h(\cdot)$ et $f(\cdot)$ des fonctions continues au sens de Lipschitz.

Considérons aussi le problème $\mathfrak{I}(0)$ défini par:

$$\mathfrak{I}(0) : \quad \text{Min}(V_0(x, u(\cdot))) = \text{Inf} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T h(x(t), u(t)) dt \right\} \right) \quad (4.3)$$

sous les mêmes contraintes que précédemment: $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Colonius (1989) et Wirth (1993) ont établi le fait que si $u(\cdot)$ est optimal pour tout problème de la famille $\mathfrak{I}(\rho)$, alors on a:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho V_\rho(x, u(\cdot)) = V_0(x, u(\cdot)) \quad \text{avec} \quad V_0(x, u(\cdot)) = \inf_{v \in U_{ad}} (V_0(x, v(\cdot))) \quad (4.4)$$

Revenons à présent au problème de commande optimale du flux de production pour un système de deux machines non fiables organisées en tandem, problème dont la

formulation correspond aux équations ((1) et (2); Annexe I), et pour lequel au sens large la solution optimale de type bang-bang n'a pratiquement pas de chance d'appartenir à la classe des politiques décentralisées à seuils critiques. Notre démarche pour le calcul d'une bonne approximation numérique du coût moyen optimal de production (pour un coefficient d'actualisation suffisamment faible) est fondée sur l'adaptation des techniques d'optimisation numériques rencontrées chez Boukas et Haurie (1990), et Boukas (1995) au cas des machines organisées en tandem. Ces techniques consistent à discretiser les équations de HJB obtenues en utilisant une approche d'approximation proposée par Kushner (1990), à résoudre le problème discret obtenu par la technique d'itération dans l'espace de politiques (Howard, 1960) en vue de trouver $V_\rho(x, u(.))$, et à calculer enfin $V_0(x, u(.))$ par $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho V_\rho(x, u(.)) = V_0(x, u(.))$.

Pour le cas de deux machines non fiables en tandem, l'équation de HJB associée au problème d'optimisation du flux de production pour une fonction coût actualisée s'écrit (Sethi et Zhang, 1994):

$$\rho V(x, \xi) = \text{Min} \left\{ g(x) + \frac{\partial V(x, \xi)}{\partial x} f^\xi(u(x)) + \sum_{\xi'=1}^N q_{\xi\xi'} V(x, \xi') \right\} \quad (4.5)$$

où $x = (x_1 \ x_2)^T$, $g(x) = c_1 x_1(t) + c_2^+ \max(0, x_2) + c_2^- \max(0, -x_2)$, $f^\xi(u) = (u_1(x, \xi) - u_2(x, \xi), u_2(x, \xi) - d)^T$, $(\xi, \xi') \in \{1, 2, 3, 4\}^2$ avec $1 := (0, 0)$, $2 := (1, 0)$, $3 := (0, 1)$ et $4 := (1, 1)$. Ceci conduit au système des quatre équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho V(x,1) = g(x, u) + \frac{\partial V(x,1)}{\partial x_2}(-d) + \sum_{\xi'=1}^4 q_{1,\xi'} V(x, \xi') \\ \rho V(x,2) = \text{Min} \left\{ g(x, u_1) + \frac{\partial V(x,2)}{\partial x_1}(u_1) + \frac{\partial V(x,2)}{\partial x_2}(-d) + \sum_{\xi'=1}^4 q_{2,\xi'} V(x, \xi') \right\} \\ \rho V(x,3) = \text{Min} \left\{ g(x, u_2) + \frac{\partial V(x,3)}{\partial x_1}(-u_2) + \frac{\partial V(x,3)}{\partial x_2}(u_2-d) + \sum_{\xi'=1}^4 q_{3,\xi'} V(x, \xi') \right\} \\ \rho V(x,4) = \text{Min} \left\{ g(x, u) + \frac{\partial V(x,4)}{\partial x_1}(u_1-u_2) + \frac{\partial V(x,4)}{\partial x_2}(u_2-d) + \sum_{\xi'=1}^4 q_{4,\xi'} V(x, \xi') \right\} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

À ce stade préliminaire, une approximation linéaire adéquate de la dérivée partielle $\frac{\partial V_\rho(x, \xi)}{\partial x_k}$ s'écrit sous la forme (Kushner et Dupuis 1992):

$$\frac{\partial V_\rho(x, \xi)}{\partial x_k} = \begin{cases} \frac{1}{h_k} (V_\rho^h(\dots, x_k + h_k, \dots, \xi) - V_\rho^h(\dots, x_k, (\cdot), \xi)) & \text{si } f_k(x, u(x(t))) > 0 \\ \frac{1}{h_k} (V_\rho^h(\dots, x_k, \dots, \xi) - V_\rho^h(\dots, x_k - h_k, (\cdot), \xi)) & \text{si } f_k(x, u(x(t))) < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.7)$$

où $V_\rho^h(\cdot)$ désigne la fonction valeur discrète pour un choix approprié de ρ et un pas de discretisation $h=(h_1 \ h_2)^\top$. Si on pose

$$\begin{aligned} s_k^\xi &= 1 & \text{si } f_k^\xi(\cdot) > 0 \\ (4.8) \quad s_k^\xi &= -1 & \text{si } f_k^\xi(\cdot) < 0 \end{aligned}$$

alors, la forme discrète de l'équation de HJB devient:

$$\rho V_\rho^h(x, \xi) = \text{Min} \left\{ g(x) + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{h_k} (V_\rho^h(x_k + s_k^\xi h_k, \cdot) - V_\rho^h(x, \xi)) |f_k^\xi(u(\cdot))| + \sum_{\xi'=1}^4 q_{\xi\xi'} V_\rho(x, \xi') ; \forall \xi \in [1, 2, 3, 4] \right\} \quad (4.9)$$

En considérant, $h=(h_1 \ h_2)$, une politique $\pi=u^*(x(t), \xi)$, ainsi qu'une grille G de $N_{x1} * N_{x2}$

points $(x_1^{\min} + n h_1, x_2^{\min} + m h_2)$, pour $n=0, 1, \dots, N_{x_1}$, $m=0, 1, \dots, N_{x_2}$, et en posant:

$$Q_\xi^h(x, \pi) = q_{\xi, \xi'} + \sum_{k=1}^{n=2} \frac{|f_k^\xi(x, u^\pi(x, \xi))|}{h_k} \quad (4.10)$$

$$p_h^\xi(x, x \pm s^\xi h, \pi) = \frac{|f(x, u^\pi(x))|}{h_k Q_h^h(x, \pi)} \quad (4.11)$$

$$p_h^\xi(x, \xi, \xi', \pi) = \frac{q_{\xi, \xi'}}{Q_h^h(x, \pi)} \quad (4.12)$$

$$p_h^\xi(x, x', \pi) = 0 \text{ pour autre point de la grille} \quad (4.13)$$

alors l'équation de HJB précédente peut être organisée sous la forme:

$$V_\rho^h(x, \xi) = \min_{\pi \in \Pi(\xi)} \left(\frac{g(x)}{Q_h^\xi(x, \pi) \left(1 + \frac{\rho}{Q_h^\xi(x, \pi)} \right)} + \frac{\sum_{x' \in G} p_h^\xi(x, x', \pi) V_\rho^h(x, x', \pi)}{\left(1 + \frac{\rho}{Q_h^\xi(x, \pi)} \right)} + \frac{\sum_{\xi' \neq \xi} p_h^\xi(x, \xi, \xi', \pi) V_\rho^h(x, \xi')}{\left(1 + \frac{\rho}{Q_h^\xi(x, \pi)} \right)} \right) \quad (4.14)$$

pour tout $x \in G$, et pour tout $\xi \in \{1, 2, 3, 4\}$. Notons que chacun des termes $p_h^\xi(x, x', \pi)$ et $p_h^\xi(\xi, \xi, \pi)$ est au plus égal à 1, et leur sommation pour tous les points de la grille G vaut 1. Ainsi, $p_h^\xi(x, x', \pi)$ peut être interprété comme la probabilité de transition de la position $x \in G$ à une position adjacente x' , alors que $p_h^\xi(\xi, \xi', \pi)$ correspond à la probabilité de transition de l'état ξ à ξ' sous la politique π . Par conséquent, l'équation précédente correspond à celle d'un processus markovien de décision contrôlé ayant

pour espace d'état $\{1, 2, 3, 4\} * G$ et pour facteur d'actualisation $\frac{1}{1 + \frac{\rho}{Q_h^\xi(x, \pi)}}$ positif et

borné par 1. Le calcul de la solution numérique optimale correspondante peut être fait à l'aide de la méthode d'itération dans l'espace des de politiques (Howard, 1960). Nous

avons implanté cette méthode en suivant l'algorithme décrit par Boukas et Haurie (1990) et Boukas (1995).

Du point de vue numérique, nous avons constaté dans le cas de quelques échantillons de deux machines en tandem, qu'à partir de $\rho=0.001$ la valeur optimale obtenue pour des valeurs plus faibles de ρ (ex: 0.0009, 0.0008), n'accuse plus de changement significatif, alors que le temps requis de convergence de l'algorithme numérique pour le même degré de précision $\varepsilon=0.0001$ devient prohibitif.

Les performances de la solution optimale du problème de décision markovien précédemment formulé, ainsi que celles des lois de commande décentralisées à seuils critiques, ont été calculées et comparées pour plusieurs exemples de systèmes de production constitués de deux machines en tandem. Les résultats de simulation que nous allons présenter ont été obtenus en considérant les valeurs $\rho=0.001$ (facteur d'actualisation suffisamment faible) et $\varepsilon=0.0001$ (erreur quadratique de convergence). Dans ces conditions, soient:

$$J_{0.001}^* = 0.001 \inf_{\pi} (V_{0.001}^h(x, \xi)) \quad (4.15)$$

avec $(x, \xi) \in G \times \{1, 2, 3, 4\}$ le coût moyen optimal asymptotique obtenu à partir de la solution de (2.14), et

$$J^* = J(a^*) = \inf_a (J(a) = J_1(a) + J_2(a)) \quad (4.16)$$

le coût moyen optimal obtenu à l'aide de notre approche d'optimisation hiérarchisée à l'intérieur de la classe de lois de production décentralisées à seuils critiques. Notre but

est de comparer $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$ pour un échantillon de systèmes de deux machines en tandem.

Le tableau 4.1 décrit quelques exemples de systèmes considérés dans notre étude, et le tableau 4.2 résume les résultats de comparaison des performances optimales et sous-optimales.

Tableau 4.1: Exemples de systèmes $S = (M_1, M_2)$ considérés pour la comparaison des performances optimales et sous-optimales

S	Paramètres des machines (M_1, M_2)						Paramètres des coûts			$h=(h_1, h_2)$
	k_1	k_2	r_1	r_2	p_1	p_2	c_1	c_2^*	c_2^*	
S_1	2.5	2	0.4	0.6	0.1	0.3	2	2	10	(1, 2)
S_2	2.5	2	0.6	0.6	0.3	0.3	2	2	10	(2, 2)
S_3	2.5	2	0.5	0.5	0.3	0.3	2	2	10	(2, 2)
S_4	2.5	2	0.3	0.3	0.1	0.1	1	2	10	(2, 2)

Tableau 4.2: Résumé des résultats de comparaison des performances optimales et sous-optimales

S	$J_{0.001}^*$	$J^*=J(a^*)$	erreur relative ε_r	Allure des coûts moyens (Figure, pages)		
				$J_{0.001}(., x)$	$J(a)$	Pages
S_1	19.72	22.71	13.7 %	Figure 4.11.1	Figure 4.11.2	66
S_2	20.12	20.98	4 %	Figure 4.12.1	Figure 4.12.2	67
S_3	28.03	31.71	11.6 %	Figure 4.13.1	Figure 4.13.1	68
S_4	21.64	24.91	13.1 %	Figure 4.14.1	Figure 4.14.2	69

Les valeurs de l'erreur relative ε_r (tableau 4.2) indiquent que l'ordre de grandeur de l'écart entre les coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$ est acceptable. Par ailleurs, la convexité du coût global de production en tandem est maintenue dans l'espace d'optimisation admissible pour tous les cas observés graphiquement (voir figures 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14). Ces résultats viennent renforcer une fois de plus la validité de notre schéma d'optimisation hiérarchisé proposé au chapitre 2 (voir Annexe I, figure 4).

À la lumière des résultats obtenus, nous constatons sur le tableau 4.2 que les lois de commande décentralisées de la production à seuils critiques pour machines en tandem, comporte un éventuel candidat dont la performance est dans certains cas très proche de la performance optimale au sens large, obtenue par une approche numérique d'optimisation asymptotique. Les deux approches d'optimisation considérées (calcul purement numérique de la performance optimale au sens large (voir équations (4.14) et (4.15)), et calcul quasi-analytique de la solution sous-optimale à l'intérieur de la classe des lois de commande décentralisées à seuils critiques (voir Annexe II, équation (23)), ont été implantées à l'aide de Matlab et des codes de programmes non optimisés. Tous les systèmes de deux machines présentés dans cette section ont été simulés à l'aide d'une station de calcul de type Pentium 200 Mhz. La résolution numérique du problème de décision markovien associé aux équations (4.14) a été conduite à l'aide de la technique *d'itération dans l'espace des politiques* (Horward, 1960) en considérant $\rho=0.001$ (facteur d'actualisation suffisamment faible) et $\varepsilon=0.0001$ (erreur quadratique de convergence).

Dans les conditions spécifiées ci-dessus, nous avons noté que le temps de simulation requis pour obtenir la convergence de l'approche numérique d'optimisation est *l'ordre de 22 heures*. En revanche, notre technique quasi-analytique d'optimisation hiérarchisé au sein de la classe des lois de production décentralisées, à seuils critiques s'opère presque instantanément, et la solution trouvée est bel et bien proche de la solution optimale au sens large. Ces derniers résultats permettent de justifier davantage l'intérêt de politiques de production décentralisée pour machines en tandem, et dégager une fois de plus l'originalité et l'utilité des schémas d'optimisation hiérarchisée de la production développés dans notre thèse.

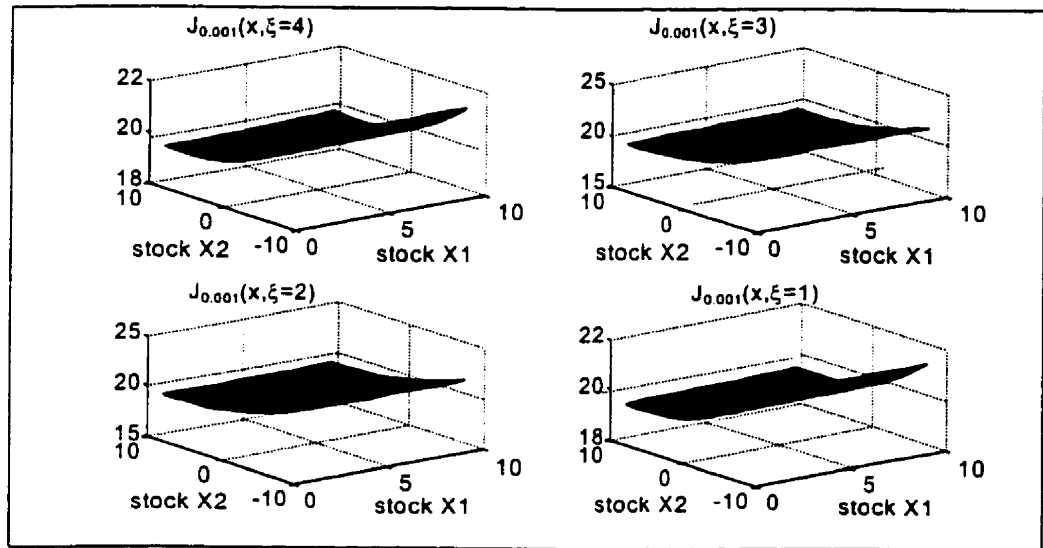


Figure 4.11.1: Coût optimal $J_{0.001}^*$ (commande optimale numérique)

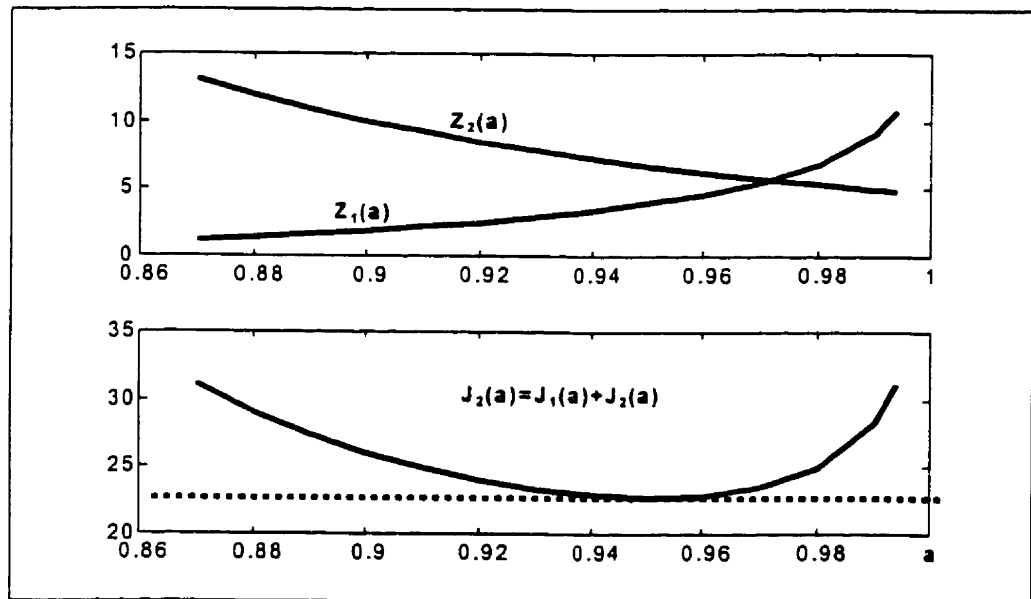


Figure 4.11.2: Coût optimal $J(a^*)$ (commande décentralisée à seuils critiques)

Figure 4.11: Comparaison des coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$ (Cas 1)

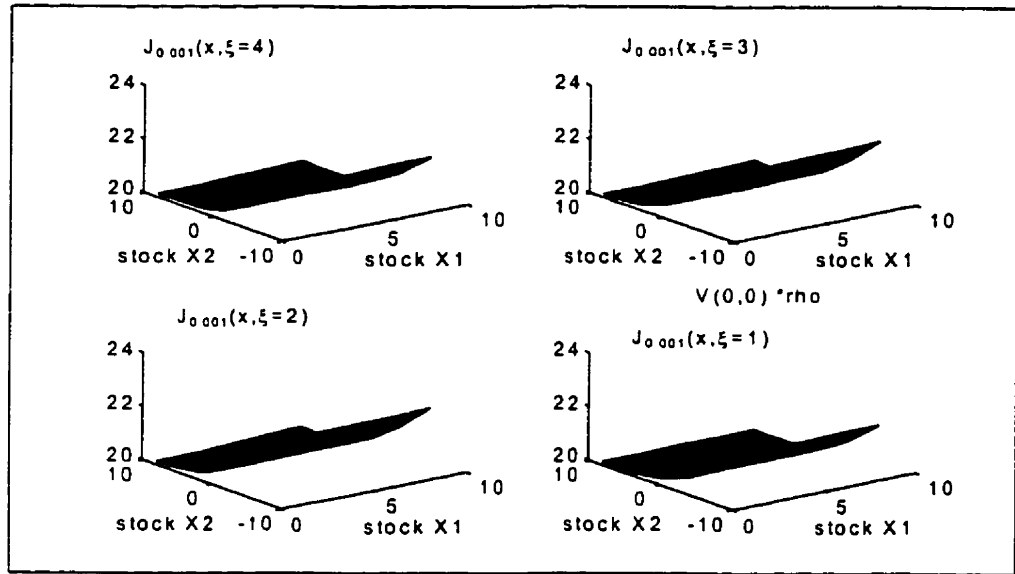


Figure 4.12.1: Coût optimal $J_{0.001}^*$ (commande optimale numérique)

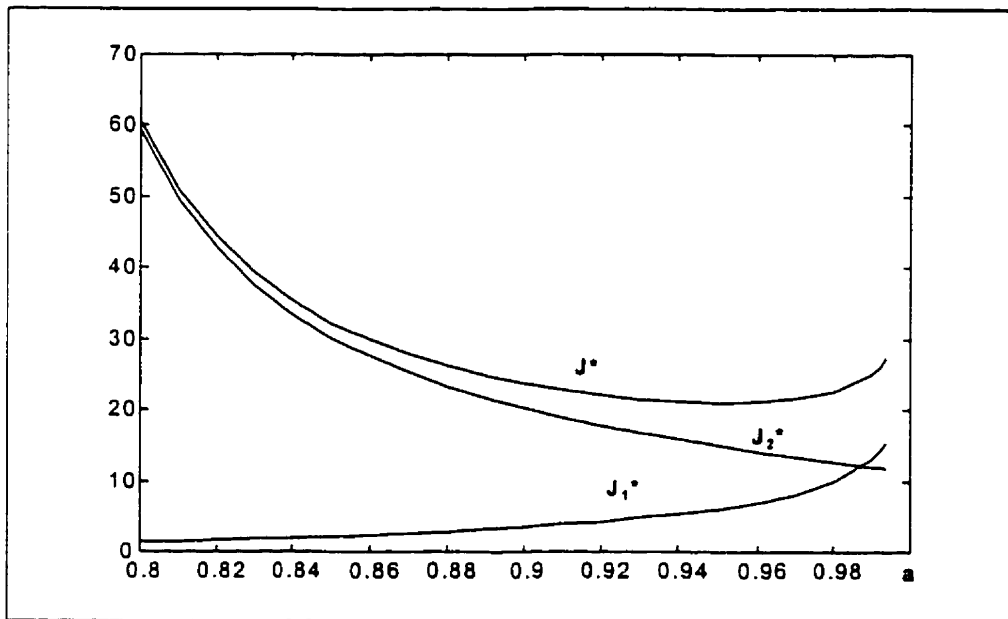


Figure 4.12.2: Coût optimal $J(a^*)$ (commande décentralisée à seuils critiques)

Figure 4.12: Comparaison des coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$ (Cas 2)

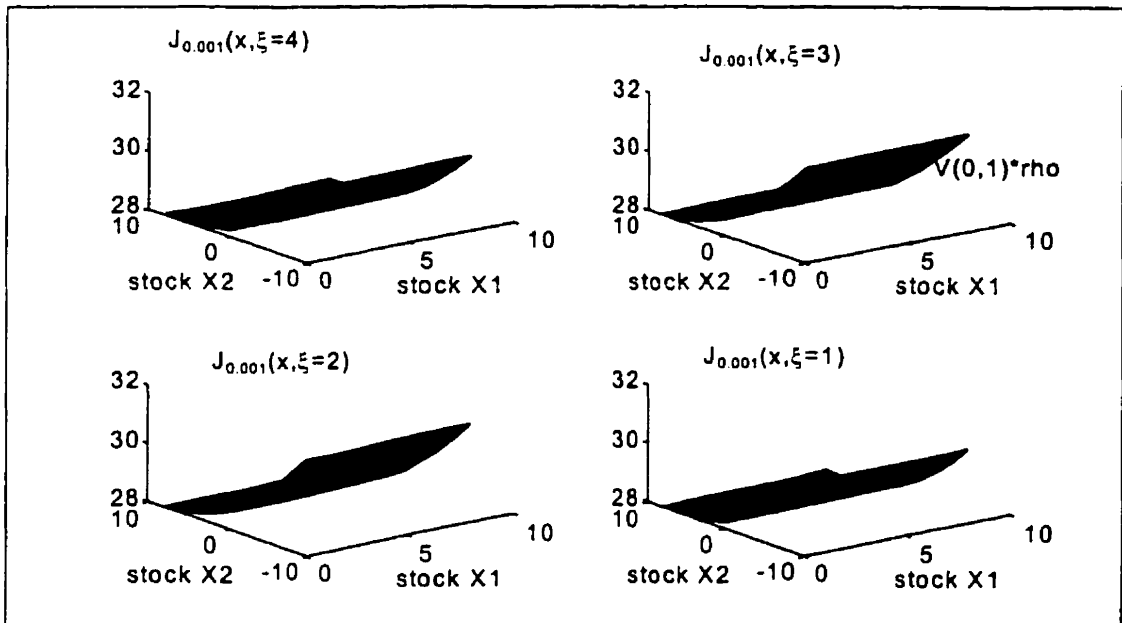


Figure 4.13.1: Coût optimal $J_{0.001}^*$ (commande optimale numérique)

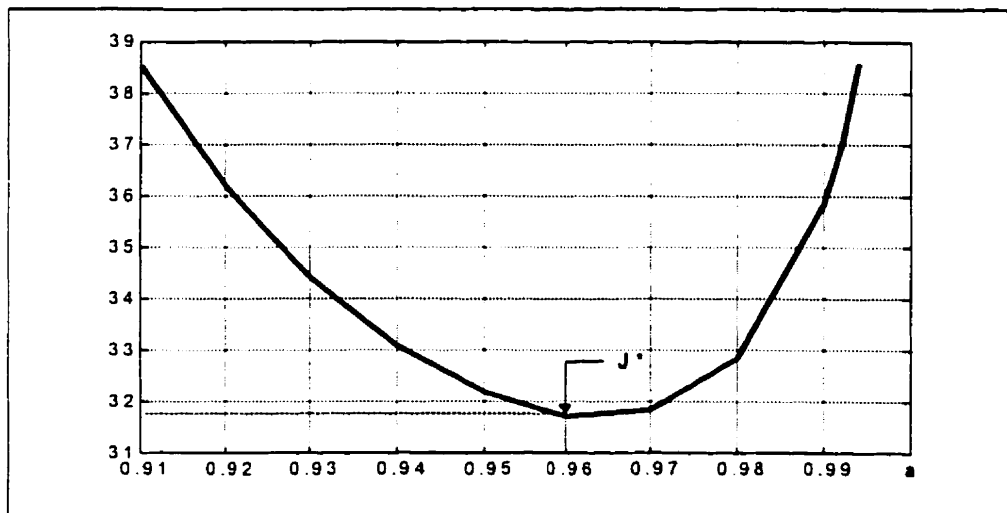


Figure 4.13.2: Coût optimal $J(a^*)$ (commande décentralisée à seuils critiques)

Figure 4.13: Comparaison des coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$ (cas 3)

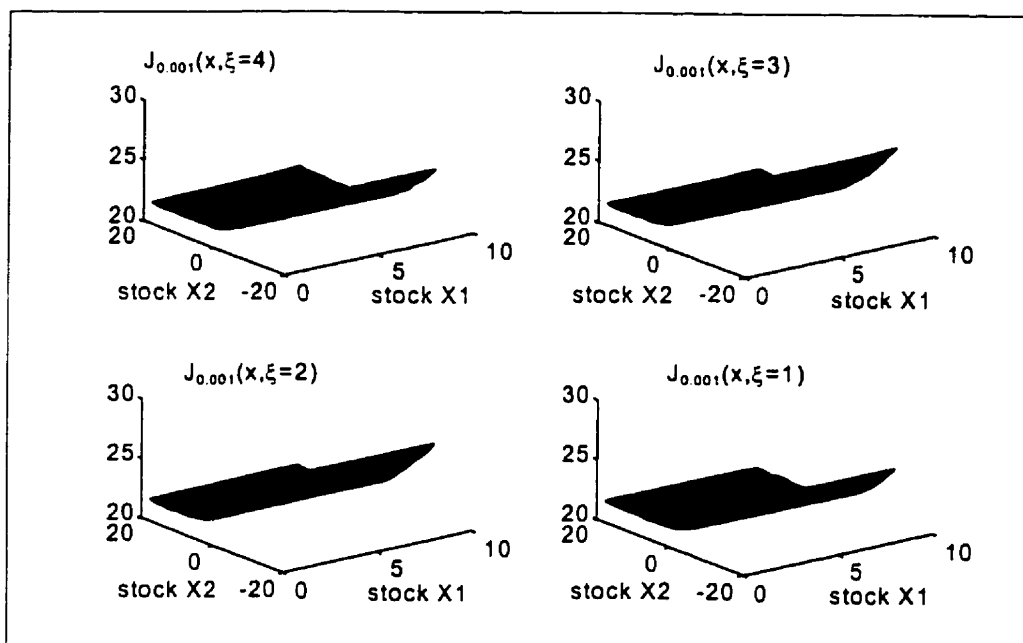


Figure 4.14.1: Coût optimal $J_{0.001}^*$ (commande optimale numérique)

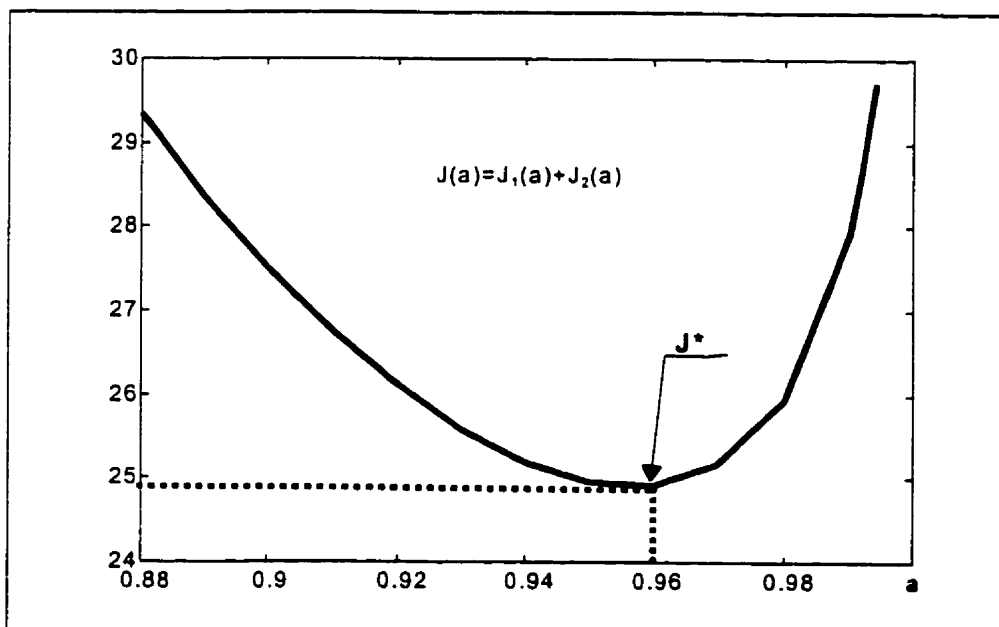


Figure 4.14.2: Coût optimal $J(a^*)$ (commande décentralisée à seuils critiques)

Figure 4.14: Comparaison des coûts optimaux $J_{0.001}^*$ et $J(a^*)$ (cas 4)

4.8 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'explorer par simulation et calculs numériques, d'intéressantes propriétés caractéristiques des lois de commande décentralisées de la production à seuils critiques pour machines en tandem. Une étude mathématique de ces propriétés pourra être envisagée à un stade ultérieur, en vue d'approfondir la compréhension du comportement des lois de gestion sous-optimale du flux de production en tandem dans les systèmes manufacturiers stochastiques.

CHAPITRE 5

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au cours des dix dernières années, la complexité du problème de gestion optimale du flux de production en tandem dans les systèmes de fabrication intégrée par ordinateur a suscité un développement important de plusieurs techniques d'optimisation à l'intérieur de la classe sous-optimale de politiques de production. Partant des insuffisances des schémas d'optimisation existants, des objectifs d'amélioration spécifiques à atteindre ont été retenus aux termes du chapitre introductif de cette thèse.

Afin d'atteindre ces objectifs nous avons développé un point de vue quasi-analytique pour l'étude de la performance des lois décentralisées de production, à seuils critiques, dans les ateliers de fabrication avec machines en tandem. Ce point de vue nous a alors amené au développement d'algorithmes performants pour l'optimisation du choix des seuils critiques en question. Dans ce qui suit, nous détaillons ce que nous considérons avoir été nos contributions originales dans la thèse et concluerons sur les perspectives de recherche futures dans la continuité des travaux débutés.

Contributions originales:

- Notre principe d'approximation (quasi-exact) par moyennage de la demande à partir de chaque station de travail d'un atelier de fabrication constitué de $M \geq 2$ machines en tandem, est l'idée principale qui nous a permis de surmonter le niveau de complexité lié à la stochasticité du processus de demande en aval associé à chaque machine isolée. Ce principe qui mérite certes d'être exploré plus profondément au niveau mathématique, pourra avoir des implications sur la réduction de la complexité du problème d'analyse des réseaux de production (plusieurs systèmes en

tandem interconnectés), ainsi que sur l'étude d'autres types de processus rencontrés en recherche opérationnelle (files d'attente, trafic en autoroute, etc ...).

- Notre stratégie de réduction d'un problème complexe de M machines en tandem, en un système approximatif constitué de seulement trois catégories de sous-problèmes mono-machines faciles à résoudre, se présente comme une nouvelle technique de décomposition et d'analyse systématique des processus de production en tandem de grande taille. Cette stratégie de transformation se distingue par le fait qu'elle nous permet de bâtir un nouveau schéma d'optimisation hiérarchisé du flux de production en tandem, à partir de l'ensemble des résultats analytiques disponibles au sujet de l'optimisation de la production dans les ateliers de fabrication constitués de machines isolées. En effet, dans le cas de $M = 2$ machines en tandem, notre schéma d'optimisation tourne presque instantanément en raison de ses fondements analytiques. Dans le cas de $M = 3$ machines en tandem, le temps d'optimisation (si l'optimum existe) requis est réduit à quelques secondes si on se limite au cas d'une approximation markovienne limite à quatre états pour chaque machine isolée, lorsque notre procédure optimale d'initialisation est utilisée. Pour tous les autres cas où généraux où $M \geq 4$, les trois types de blocs de construction requis pour la recherche rapide de l'optimum global sont déjà présents. Ceci permet de maintenir au strict minimum le temps global d'optimisation. Aucune autre procédure proposée jusqu'à date ne possède, à notre connaissance, de tels atouts.
- Contrairement aux schémas d'optimisation hiérarchisés connus pour machines non fiables organisées en tandem, celui qui est proposé dans cette thèse se distingue en plus par les grands avantages hérités des systèmes élémentaires mono-machines. La facilité de compréhension, la simplicité d'implantation, la rapidité d'exécution, l'extension aisée aux problèmes de grande taille sans complexité explosive, et les performances acceptables obtenues sur un très large échantillon de (petits) systèmes, sont à notre avis autant de caractéristiques intéressantes pour lesquelles notre schéma d'optimisation hiérarchisé constitue un nouveau candidat très compétitif pour la

gestion en temps réel de la production en tandem dans les environnements manufacturiers stochastiques.

Les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse, les *deux articles de revue* soumis pour publication (Ref. [58] et [60]) et les *deux articles de conférence* (Ref. [57] (déjà présenté) et [59] (soumis pour présentation)) sont porteurs de nouvelles perspectives. En cas d'acceptation pour publication de nos articles cités, ils contribueront à la fois à démontrer le caractère rigoureux et original du nouveau schéma d'optimisation de la production initié dans cette thèse, et à diffuser nos résultats obtenus au sein des communautés académiques et industriels. Un autre article en cours de préparation porte sur les propriétés des lois de commande décentralisées de la production à seuils critiques explorées au chapitre 4.

Nouvelles perspectives:

- Une ensemble de simulations nous a permis de constater la robustesse du principe d'approximation par moyennage de la demande, ainsi que d'étudier les caractéristiques des meilleurs candidats potentiels à l'intérieur de la classe sous-optimale des règles de production décentralisés à seuils critiques pour machines en tandem. Les mécanismes mathématiques permettant d'expliquer la qualité uniforme du principe d'approximation par moyennage de la demande n'ont cependant pas été élucidés, de même que les conditions de convexité des fonctions coût global avec comme variables indépendantes les coefficients de disponibilité des encours. Ces deux questions méritent d'être explorées avec toute la profondeur nécessaire.
- Notre travail a été conduit en considérant un atelier de fabrication constitué de $M \geq 2$ machines en tandem, produisant un seul type de pièces. L'extension ultérieure de

notre étude au cas d'un système de $M \geq 2$ machines en tandem, produisant $p \geq 1$ types de pièces, serait une importante contribution.

- Dans un contexte de modélisation fluide, les classes de politiques décentralisées de production à seuils critiques, définies et optimisées dans cette thèse pour machines en tandem, sont similaires aux classes de politiques de type kanban. Il serait donc important d'envisager les conséquences de nos développements quant à l'optimisation des systèmes kanban dont la popularité est bien établie dans les industries manufacturières modernes.
- Enfin, jusque là, nous avons passé sous silence l'aspect logiciel de cette thèse. Selon nos estimations, cet aspect a pourtant consommé environ 30% de nos efforts. Les expressions analytiques utilisées dans notre schéma de base d'optimisation hiérarchisé ont été établies au préalable à l'aide du logiciel de calcul symbolique Maple V, puis importées et intégrées ensuite dans l'environnement du logiciel Matlab pour des fins d'optimisation et de simulation plus conviviales. Par ailleurs, un simulateur généralisé de Monte-Carlo pour machines en tandem opérant sous les règles décentralisées de production à seuils critiques a été développé à l'aide de Matlab, en vue de valider les résultats prédits par le schéma de calcul que nous avons proposé. Il serait *très souhaitable* que les diverses améliorations et extensions futures des travaux de cette thèse, soient également programmées et deviennent intégrables dans la *palette à outils Matlab* actuelle. Ainsi apparaîtrait un logiciel très convivial de gestion sous-optimale de la production en tandem pour les industries manufacturières, opérant dans un contexte stochastique.

RÉFÉRENCES

- [1] ALGOET, P. (1989). Flow balance equation for Steady state distribution of a flexible manufacturing system. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 34 (8), 917-921.

- [2] AKELLA, R., CHOONG, Y. F. et GERSHWIN, S. B. (1984). Performance of hierarchical scheduling policy. *IEEE Transaction on Components, Hybrids and Manufacturing Technology*. CHMT-7, 3, 225-240.

- [3] AKELLA, R. et KUMAR P. R. (1986). Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31, 116-126.

- [4] ARAPOSTATHIS, A., BORKAR, V. S., GAUCHERAND, E. F., GHOSH, M. K., et MARKUS, S. I. (1993). Discrete-time controlled Markov processes with average cost criterion: A survey. *Siam Journal on Control and Optimization*, 31(2), 282-344.

- [5] BAI, S. X. et GERSHWIN, S. B. (1995). Scheduling manufacturing systems with work-in-process inventory control: Single-part-type systems. *IIE Transactions*, 27, 599-617.

- [6] BAI, S. X. et GERSHWIN, S. B. (1995). Scheduling manufacturing systems with work-in-process inventory control: Multiple-part-type systems. *International Journal of Production Research*, 32 (2), 365-385.

- [7] BERG, M., POSNER, M. J. M. et ZHAO, H. (1994). Production-inventory systems with unreliable machines. *Operations Research*, 42 (1).

- [8] BIELECKI, T. et KUMAR, P. R. (1988). Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems. *Operations Research*, 36 (4), 532-541.
- [9] BEYER, D. et SETHI, S. P. (1997). Average cost optimality in inventory models with Markovian demands. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 92 (3), 497-526.
- [10] BEYER, D., SETHI, S. P. ET TAKSAR (1998). Inventory models with Markovian demands and cost functions of polynomial growth. *Journal of Optimization Theory and Applications*, . 98 (2), 281-323.
- [11] BONVIK, A. M., COUCH, C. E., et S. B. GERSHWIN. A comparison of production line control mechanisms. *International Journal of production research*, 35 (3), 789-804.
- [12] BONVIK, A. M. (1996). Performance Analysis of manufacturing Systems Under Hybrid Control Policies. Thèse de Ph.D., Génie électrique et génie informatique, MIT
- [13] BOUKAS, E. K. et HAURIE, A. (1990). Manufacturing flow control and preventive Maintenance: A Stochastic Control Approach. *IEEE on automatic control*, 35 (9), 1024-1031.
- [14] BOUKAS, E. K. (1995). Numerical methods for HJB equations of optimization problems for piecewise deterministic systems. *Optimal Control Applications and Methods*, 16, 4-18.
- [15] BOUKAS, E. K. et YANG, H., (1996). Optimal control of manufacturing flow and preventive maintenance. *IEEE Transactions on Automatic control*, 41(6), 881-885.

- [16] BUZACOTT, J. A et SHANTHIKUMAR, J. G. (1986). Models for understanding flexible manufacturing systems. *AIIE Transactions*, 12, 890-905.
- [17] CARAMANIS, M. AND LIBEROPOULOS (1992). Perturbation analysis for the design of flexible manufacturing systems flow controllers. *Operations Research*, 40 (6), 1107-1125.
- [18] COLONIUS, F. (1989). Asymptotic behavior of optimal control systems with low discounted rates. *Mathematics of Operations Research*, 14, (2), 309-316.
- [19] CONDOR (1988). Operations Research: The next decade. *Operations research*, 36 (4), 619-637.
- [20] CONWAY, R., MAXWELL, W., MCCLAIN, J. O. et THOMAS, L. J. (1988). The role of work-in-process inventory in serial production lines. *Operations Research*, 36 (2), 229-241.
- [21] CROUHY, M. et GREIF, M. (1991). Gérer simplement les flux de production du plan directeur au suivi des ateliers. *Edition du Moniteur*, Paris.
- [22] DARREN-REDFERM, (1996). Mapple V: The Mapple Handbook, Springer-Verlag.
- [23] DUPONT-GATHERMAND C. (1984). A survey of flexible manufacturing systems. *Journal of Manufacturing System*, 1, (1).
- [24] EL-FÉRIK, S. AND MALHAMÉ, R. P. (1997). Padé approximants for the transient

optimization of hedging control policies in manufacturing. *IEEE Transactions on Automatic control*, 42 (4), 440-457

[25] EL-FÉRIK, S., MALHAMÉ R., P. AND BOUKAS EL-K (1998). A tractable class of maximal hedging policies in multi-part manufacturing systems. *Discrete-Event Dynamic Systems: Theory and Application*, 8, 299-331.

[26] FONG, N. T. et ZHOU, X. Y. (1996). Hierarchical production policies in stochastic two-Machine flowshop with finite buffers. *Journal of Optimization theory and Applications*, 89(3), 681-712.

[27] GERSHWIN, S. B. (1994). Manufacturing systems engineering, *Englewood Cliffs, Prentice Hall*.

[28] GERSHWIN, S. B., (1997). Design and operation of manufacturing systems – control – and system – theoretical models and issues. Automatic Control Conference, Albuquerque, New Mexico.

[29] GERSHWIN, S. B., AKELLA, R. et CHOONG Y. F. (1985). Short term production scheduling of an automated manufacturing facility. *IBM Journal of Research and Development*, 29 (4), 392-400.

[30] GERSHWIN, S. B. , HILDEBRANT, R. R., SURI, R. et MITTER S. K. (1986). A control perspective on recent trends in manufacturing systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 3-15.

[31] GLASSERMAN, P. (1995). Hedging-point production control with multiple failure modes. *IEEE Transactions on automatic control*, 40 (4), 707-712.

- [32] GRAVES, S. C. (1981). A review of production scheduling. *Operations research*, 29 (4), 646-675.
- [33] GRIFFITHS, J. D. (1996). The coefficient of variation of queue size for heavy traffic. *Journal of the Operational Research Society*, 47 (8), 1072-1076.
- [34] HORWARD, R. A. (1960). Dynamic programming and Markov processes. *John Wiley & Sons*.
- [35] HU, J-Q. (1995-a). Production control for failure-prone production systems with no backlog permitted. *IEEE Transactions on Automatic control*, 40 (2), 299-295.
- [36] HU, J-Q. (1995-b). A decomposition approach to flow control in tandem production systems. *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, LA, 3140-3143.
- [37] HU, J. Q., VAKILI, P. et YU, G. X. (1994). Optimality of hedging point policies in the production control of failure prone manufacturing systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 39 (9), 1875-1879.
- [38] HU, J. Q. et XIANG D. (1993). The queueing equivalence to a manufacturing system with failures. *IEEE Transactions Automatic control*, 38 (3), 499-502.
- [39] HU, J. Q. et XIANG, D. (1995). Monotonicity of optimal flow control control for failure-prone production systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 86 (1), 57- 71.

- [40] HUAN, L., HU, J. Q, et Vakili, P. (1998). Optimal control of a Multi-state manufacturing system: control of production rate and temporary increase in capacity. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, 2155-2159.

- [41] KUSHNER, H. J. et DUPUIS, P. G. (1992). Numerical methods for stochastic control problems in continuous time, *Springer-Verlag*.

- [42] KIMEMIA, J., et GERSWIN S. B. (1983). An algorithm for the computer control of a flexible manufacturing system. *IIE Transactions*, 15 (4), 353-362.

- [43] KENNE, J.P., GHARBI, A. AND BOUKAS E. K. (1997). Control policy simulation based on machine age in a failure prone one-machine, one-product manufacturing system. *International Journal of Production Research*, 35 (5), 1431-1445.

- [44] KRICHAGINA, E. V., LOU , S. X. et TAKSAR, M. I. (1995). Diffusion approximation for a controlled stochastic manufacturing system with average cost minimization. *Mathematics of Operations Research*, 20 (4), 895-920.

- [45] LEHOCZKY, J. , SETHI, S. P., SONER, H. M. et TAKSAR, M. I. (1991). An asymptotic analysis of hierarchical control of manufacturing systems under uncertainty, *Mathematics Of Operation Research*, 16 (3), 597-608.

- [46] LIBEROPOULOS, G. et CARAMANIS, M. (1994). Infinitesimal perturbation analysis for second derivative estimation and design of manufacturing controllers. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 81 (2), 297-327.

- [47] LIBEROPOULOS G. et HU J. (1995). On the ordering of optimal hedging points in a class of manufacturing flow control models. *IEEE Transactions on Automatic control*, 40, 282-286.
- [48] LOU, S. X. C. et KAGER, P. W. (1989). A robust production control policy for VLSI wafer fabrication. *IEEE Trans. Semiconductor Manufacturing*, 2 (4), 159-164.
- [49] LOU, S. X. C. , SETHI, S. P. AND ZHANG, Q. (1994). Optimal feedback production planning in a stochastic two-machine flow-shop. *European Journal of Operational Research*, 73, 331-345.
- [50] MAIMON, O. Z. et GERSHWIN, S. B. (1988). Dynamic scheduling and routing for flexible manufacturing systems that have unreliable machines. *Operations Research*, 36 (2), 279-291.
- [51] MALHAMÉ, R. P. (1991). Criteria for the ergodicity of hedging point control policies in single part manufacturing systems. *Technical Report*, Gerald, G-91-29, 1-19, Montreal, Canada.
- [52] MALHAMÉ, R. P. (1993). Ergodicity of hedging point policies in single-part multiple-state manufacturing systems. *IEEE Transactions automatic control*, 38 (2), 340-343.
- [53] MALHAMÉ, R. P. et BOUKAS, E. K. (1991-a). A Markov renewal analysis of the production control of a flexible manufacturing system under hedging point policies, *Technical Report*, Gerard G89-37, 1-27, Montreal, Canada.
- [54] MALHAMÉ, R. P. AND BOUKAS, E. K. (1991-b). A Renewal theoretic analysis

of a class of manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic control*, 36 (5), 580-587.

[55] MASCOLO, M. D., FREIN, Y. AND DALLERY Y. (1996). An analytical method for performance evaluation of kanban controlled production systems. *Operations Research*, 44 (1), 50-64.

[56] MATLAB (1996), The Language of technical computing: using Matlab version 5, *Editions Mathworks*.

[57] MBIHI, J. et MALHAMÉ, R. P. (1998). Optimization of a class of decentralized hedging policies in an unreliable two-machine flow shop. Présenté à 37th *IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, Decembre 98, TM03-4: Manufacturing and Scheduling.

[58] MBIHI, J. et MALHAMÉ, R. P. (1998). Optimization of a class of decentralized hedging policies in a stochastic two-machine flow shop. Soumis à *IIE Transactions on Scheduling and Logistics*.

[59] MBIHI, J. et MALHAMÉ, R. P. (1999). A suboptimal class of decentralized hedging production policies for single part-type, stochastic M-machine flow shops. Soumis à 38th *IEEE Conference on Decision and Control*.

[60] MBIHI, J. et MALHAMÉ, R. P. (1999). Decentralized hedging production policies for M tandem machines in stochastic manufacturing systems. Soumis à *IEEE Transaction on Robotics and Automation*.

[61] NAYLOR, T. H., BALINTFY, J. L., BURDICK, D. S. et CHU, K. (1966).

Computer Simulation Techniques. John Willey and Sons, Newyork.

[62] OLSDER, G. J. et SURI, R. (1980). Time optimal control of parts routing in a manufacturing system with failure-prone machines. *Proceeding of the 19th IEEE Conference On Decision and Control*, 722-727, Albuquerque.

[63] PANWALKAR, S. S. et ISKANDER, W. (1977). A survey of scheduling rules *Operations Research*, 25 (1), 45- 61.

[64] PERKINS, J. R. et SRIKANT, R. (1995). Hedging policies for failure-prone manufacturing systems: Optimality of JIT and bounds on buffer levels. *Proceedings Of the 34th Conference on Decision & Control*, 3144-3149, New Orleans.

[65] PERKINS, J. R. et SRIKANT, R (1997). Scheduling multiple part-types in an unreliable single machine manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic control*, 42 (3), 364-377.

[66] POSNER, M. J. M., et BERG, M. (1989). Analysis of a production-inventory system with unreliable production facility. *Operations Research Letters*, 8, 339-345.

[67] PRESMAN, E., SETHI S., et ZHANG, Q. (1995). Optimal feedback production in stochastic N-machine flowshop. *Automatica*, 31 (9), 1325-1332.

[68] REISMAN, A., KUMAR, A., MOTWANI, J. et CHENG, C. H. (1997). Cellular manufacturing : A statistical review of the litterature (1965-1995). *Operations Research*, 45 (4), 508- 519.

- [69] RODAMMER, F. A. et WHITE, P. (1988). A Recent survey of production scheduling. *IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics*, 18 (6), 841-85.
- [70] RYZIN, V. G., LOU, S. X. C. et GERSHWIN, S. B. (1993). Production control for a tandem two-machine system. *IIE Transactions*, 5, 5-20.
- [71] SAA, A., KAWAMURA, K. et BISWAS, G. (1997). Performance evaluation of contract net-based heterarchical scheduling for flexible manufacturing systems. *Special issues: Automation and Soft computing*, 3 (3), 229-248.
- [72] SAMARATUNGA, C., SETHI, S. P. et ZHOU, X. Y. (1997). Computational evaluation of hierarchical production control policies for stochastic manufacturing systems. *Operations Research*, 45 (2), 258-274.
- [73] SETHI, S. P. et ZHOU, X. Y. (1994). Stochastic dynamic job shops and hierarchical production planning. *IEEE Transactions on Automatic control*, 39 (10), 2061-2076.
- [74] SETHI, S. P. et ZHANG, Q. (1994). Hierarchical decision making in stochastic manufacturing system. *Birkhauser*.
- [75] SHARIFNIA, A. (1988). Production control of a manufacturing system with multiple machine states. *IEEE Transactions on Automatic control*, 33, 620-625.
- [76] SHARIFNIA, A. M. et CARAMANIS (1991). Dynamic setup scheduling and flow control in manufacturing. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and applications*, 1, 149-175.

- [77] SONG, D. P., et SUN, Y.X (1999). Optimal control structure of an unreliable manufacturing system with random demands. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 44 (3), 619-622.
- [78] SONG, D. P., SUN Y. X. et XING, W. (1998). Optimal control of a stochastic assembly production line. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98 (3), 681-700.
- [79] SRIVATSAN, N. et DALLERY, Y. (1994). Partial characterization of optimal policies in unreliable multi-part-type systems. *Technical Report Laboratory for Manufacturing and Productivity*, LMP94-004.
- [80] TSITSIKLIS, J. N. (1984). Convexity and characterization of optimal policies in a dynamic routing problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 44 (1), 101-135.
- [81] VAN RYZIN, G., Lou, S. X. C. et GERSHWIN, B. S. (1993). Production Control for a Two-Machine System. *IIE Transactions*, 25 (5), 5-20.
- [82] VEATCH M. H. et WEIN L. M. (1994). Optimal control of a two-station tandem production /inventory system. *Operation Research*. 337-350.
- [83] VISWANADHAM, N. et NARAHARI, Y. (1992). *Performance Modeling of Automated Manufacturing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [84] WIRTH, F. (1993). Convergence of the value function of discounted infinite horizon optimal control problems with low discounted rates. *Mathematics of operations Research*, 18 (4), 1006-1019.

- [85] YAN H., YIN G. et LOU, S. X. C. (1994). Using stochastic optimization to determine threshold values for the control of unreliable manufacturing systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 83, 511-539.
- [86] WARNECKE, H. J. et STEINHILPER (1988). Flexible manufacturing systems and 20th annual IPA conference. *Proceeding of the 7th International Conference*, 13-14, Shultgart, West Germany.
- [87] YU, X.Z. et SONG, W. Z. (1999). Further properties of optimal hedging points for a class of manufacturing systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (2), 379-383.

ANNEXES

ANNEXE I

Optimization of a Class of Decentralized Hedging Policies in a Stochastic Two-Machine Flow Shop^(*)

Jean Mbihi⁽¹⁾ and Roland P. Malhamé⁽²⁾

École Polytechnique, Département de Génie Électrique et Génie Informatique, Division Automation & Systèmes,
C.P. 6079 Succ. Centre Ville, H3C3A7, Montréal, Québec, Canada, Tel . (514) 3404696; Fax. (514)3404078

⁽¹⁾ E-mail: mbihi@auto.polymtl.ca

⁽²⁾ E-mail : malhame@auto.polymtl.ca

Abstract

This paper deals with the optimal production control problem in a stochastic two-machine flow shop. Our aim is to develop approximation techniques for deriving close to optimal production policies within a suboptimal class of *decentralized hedging policies*, whereby each machine strives to maintain a fixed critical level of parts to be determined. For that purpose, using two approximate decoupling principles, a *machines decoupling approximation* and a so-called *demand averaging principle*, both upstream and downstream production costs required to maintain a given *availability coefficient of the work-in-process* (as well as the associated critical levels of parts) are derived analytically. The quality of the demand averaging principle as an approximation is theoretically assessed, and both approximations are numerically tested. Subsequently, one searches over all admissible availability coefficients for one that minimizes the overall production cost. The proposed optimization scheme appears to be very competitive for real time use since it runs almost instantaneously when implemented using Matlab on a personal computer. In addition, it provides good performance when tested against Monte-Carlo based optimization over the same class of control laws. Results emerging from a wide set of sample systems are presented, and the decoupling principles initiated appear to be generalizable for an N-machine flow shop, where $N > 2$.

Key words: *Two-machine flow shops, hedging production policies, demand averaging principle, first passage-times*

^(*) Soumis à *IIE Transactions on Scheduling and Logistics* le 30/06/98 (1^{er} manuscrit)

1. Introduction

Since the pioneering works of Olsder and Suri [1] and Kimemia and Gershwin [2], the problem of optimally controlling the production rate in failure prone manufacturing systems has received increasing attention among both practitioners and researchers. A number of surveys regarding manufacturing systems scheduling have been reported by many authors including Panwalkar and Iskander [3], Graves [4], Dupont-Gathermand [5], Gershwin, Hildebrant, Suri and Mitter [6], Buzacott and Shanthikumar [7], Maison and Gershwin [8], Rodammer and White [9] and Reisman, Kumar, Motwani and Cheng [10]. See also Conway, Maxwell, McClain and Thomas [11], for an overview regarding the role of work-in-process and inventory in tandem manufacturing systems. Generally speaking, the optimal production control problem could become quite complex, even when a single machine is involved.

For an unreliable manufacturing system consisting of a single machine with Markovian breakdowns and repairs, one part-type and a constant demand, the optimal production rule for a piecewise linear cost function is available analytically and belongs to the class of hedging policies (see Akella and Kumar [12], Bielecki and Kumar [13], Hu, Vakili and Yu [14]). The hedging production policy concept was initiated earlier in a wider context by Kimemia and Gershwin [2]. This was followed by improvements presented by Akella, Choong and Gershwin [15], Gershwin, Akella and Choong [16], and Gershwin [17]. The idea behind other subsequent works was to relax some of the assumptions while maintaining the use of hedging production policies as a suboptimal or asymptotically optimal class of policies in the resulting manufacturing system. For example, Hu and Xian [18, 19], Krichagina, Lou, Sethi and Taksar [20] and Glasserman [21] have given some insight into the case of non Markovian machines. Algoet [22], Sharifnia [23], Malhamé and Boukas [24, 25] and Malhamé [26, 27] have extended in

different ways the basic characterization of the hedging production policy, in multiple-mode manufacturing systems with Markovian machines. Boukas and Haurie [28], Boukas [29], Boukas and Yang [30] and Kenne, Gharbi and Boukas [31] analyzed the case of machines where operating modes are age-dependent. Furthermore, the case of a single machine producing *many part-types* has been investigated by El-Férik, Malhamé and Boukas [32], and Perkins and Srikant [33, 34], while Lehoczky, Sethi, Soner and Taksar [35], Caramanis, Liberopoulos [36], Liberopoulos and Camaranis [37] have been interested in multiple part-types manufacturing systems with parallel machines. On the other hand, Postner, Berg and Zhao [38], Berg, Postner and Zhao [39], Srinivassan and Lee [40] have taken into consideration the stochastic nature of the demand process, while Sethi and Zhang [41] have developed a hierarchical, singular perturbation theory based methodology, for production control in manufacturing systems.

For manufacturing systems involving several unreliable machines connected in a tandem configuration, the exact computation of optimal production policies based on the dynamic programming equations is a formidable task either analytically or numerically. Because of the complexity involved, a set of approximate suboptimal production rules have already been proposed, including *numerically optimized* controls (NOC), *asymptotic hierarchical* controls (AHC), *two-boundary* controls (TBC), *pure surplus* control (PSC) and *Work-in-process* control (WIPC). The NOC combine a suitable discretization technique (see Ryzin, Lou and Gershwin [42], Veatch and Wein [43]), with the policy iteration approach, but unfortunately the whole numerical procedure requires a massive computational effort. AHC has been developed by Fong and Zhou [44], Sethi and Zhang [41], Presman, Sethi and Zhang [45], and Samaratunga, Sethi and Zhou [46]. The idea behind AHC is to numerically construct approximate optimal production rules, based on the production decisions for an approximately

defined limit system obtained based on a separation of time scales assumption. However, we conjecture that the adaptation of AHC for solving an average cost optimization problem might be computationally hard because of the discounted rate problem (see Colonius [47] and Wirth [48]). The TBC consisting of three parameters, has been initiated by Lou and Kager [49] for a VLSI wafer fabrication, and has been investigated later by Ryzin, Lou and Gershwin [42]. However, its numerical implementation remains a very demanding task. The PSC of a tandem two-machine system is in fact a simplified version of the TBC with only two parameters for a tandem two-machine system. Yan, Yin, and Lou [50] have proposed a stochastic optimization method for the numerical computation of these parameters in the case of a two-machine flow shop. A heuristic-type method for the *surplus* (cumulative difference between production and final product demand) control has been reported by Bai and Gershwin [51, 52] for single part and multiple parts manufacturing flow shops. Finally, the WIPC involves a given set of thresholds for each machine. For example, Yan, Yin and Lou [50] have considered one hedging level of WIP per machine in the case of a tandem two-machine system. They have numerically computed the optimal thresholds using an infinitesimal perturbation technique. Alternatively, Hu [53] has proposed a decomposition approach (based on the so-called starvation cost) for the determination of hedging levels associated with a tandem two-machine system. Hu's approach differs from the one investigated herein both in the structure of the control policy considered which is not decentralized, and in the decomposition approach which tends to ignore starvation phenomena as they affect the demand backlogs at the downstream machine. Rather, the downstream machine is considered as having a perfectly reliable supply, and instead a starvation cost is associated with a zero buffer in the upstream machine. In fact, the optimal hedging level of the downstream machine is calculated independently from any knowledge of upstream machine storage costs. The starvation cost for the upstream machine is computed using an analytical cost expression

due to Hu which is applied although valid neither under variable demand, nor under a random starvation cost. Clever as they may be, the quality of the approximations remains untested. Furthermore, the modeling approach seems to move away from the physics of the processes involved. Finally, it appears that the complexity structure of the control laws, and the associated computations could rapidly explode in the case of N machine systems, $N \geq 2$. Thus, despite this rich literature, a thoroughly satisfactory methodology for the flow control of stochastic tandem machines appear to be missing.

In the aforementioned literature, one can observe that except for Yan, Yin and Lou [50], little attention has been devoted to direct extensions of hedging production policies for single machine systems. However, one could intuitively argue for preserving, even in the more complicated cases, the simplicity and decentralized behavior of hedging production policies for single machine facilities. The proposed production class of production policies will be called *decentralized hedging production (DHP)* policies. It consists in associating to each machine throughout the transfer line, a set of parts critical levels (control law design parameters) to be optimized and maintained whenever possible (one for each feasible mode of that machine). When adequately optimized, each critical level could be thought of as a form of optimal insurance policy against production resource failures. Subsequently, the choice of production level at any given workstation, would depend only on local information regarding the operating state of the workstation and the levels of immediate upstream and downstream buffers. We submit that DHP policies could be competitive with good performance for real time use in tandem manufacturing plants. In fact, they mimic in a fluid model context the kanban control structure [62, 63].

In this paper, DHP policies for stochastic flow shops are investigated. We propose a decomposition methodology over the class of DHP policies which reduces the

complex optimization problem for a tandem two-machine system to a collection of single optimization subproblems with known analytical solutions, by relying on two (approximate) decoupling principles: a so-called *machines decoupling approximation* which helps modeling the upstream machine as viewed from downstream (stochastic supply), and a so-called *demand averaging principle* which helps modeling the downstream machine as viewed from upstream (stochastic demand). The nature of approximations and conditions for their validity are discussed. Physical arguments are presented to help explain the quality of the demand averaging principle approximation, and numerical evidence is presented for both approximations. Subsequently, fictitious isolated machine equivalents are obtained using first passage-time analysis, and whenever necessary Markovianization via a Padé approximants technique. The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 is devoted to the description of the production system of interest, and to the formulation of the optimal production control problem. In Section 3, our optimization approach is developed within the suboptimal class of *decentralized hedging production policies*. Diverse sample systems are investigated in Section 4 so as to challenge the proposed optimization scheme. Finally, conclusions are drawn in Section 5.

2. System description and problem formulation

In this section, the two-machine flow shop considered is described and the optimal flow control problem is formulated for that system within the suboptimal class of DHP policies.

2.1 System description

We consider throughout the paper a single product manufacturing system consisting of two unreliable machines organized in tandem (see Figure 1). The raw material processed by the upstream machine M_1 is transferred into an internal buffer, and finished goods produced by the downstream machine M_2 are stored in a warehouse buffer. Each machine and its associated buffer represent an aggregated cell or workstation. Such an aggregated structure could be associated with a numerical control machine, a conveyor, a robot, a communication network, and a programmable logic controller or a computer. Both upstream machine M_1 and downstream machine M_2 are subject to random breakdowns and repairs over an infinite time horizon. It is assumed that the upstream machine M_1 is never starved nor blocked, and the downstream machine M_2 is never blocked. Such assumptions hold well in practice for the class of manufacturing systems with a reliable source of raw material and with large buffers. The production capacity of each machine is zero when the machine is down or eventually starved, and is a constant otherwise. The breakdown and repair statistics of machines captured by the technical staff, are assumed to be Markovian. The demand rate emerging from marketing data is a constant d , and backlog (or unsatisfied demand for finished goods) is allowed although it is associated with costs. In addition, neither reprocessing nor discarding of defective products are considered. Following Olsder and Suri [1], Kimemia and Gershwin [2], Akella and Kumar [12] and Bielecki and Kumar [13], we use further a fluid hybrid state model of the production flow.

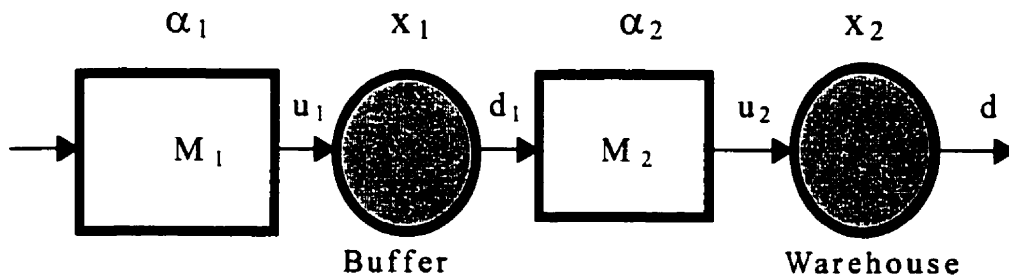


Figure 1: Unreliable tandem two-machine system

2.2 Notations and problem formulation

Here, we first develop notation for the relevant dynamic quantities in the two-machine system. Subsequently, given a piecewise linear cost function, an infinite horizon average cost optimization problem over the defined class of DHP policies is formulated.

The notation used further is as follows: $i=1,2$ (index of machine M_i), X_i (buffer level -continuous state variable), u_i (production rate - decision or control variable), k_i (maximum production rate), $\alpha_i(t)$ (discrete state -1 if M_i is up, and 0 otherwise), r_i and p_i (repair and failure rates respectively), π (arbitrary production policy), π_h^* (an optimal production policy, if it exists, within the class of DHP policies), J_π (overall cost associated with production policy π), Z_i (critical hedging level of parts), $Z=(Z_1, Z_2)^T$, $X(t)=(x_1(t), x_2(t))^T$, $\alpha=(\alpha_1(t), \alpha_2(t))^T$ and the production cost per unit time $g(X)=c_1x_1+c_2\max(0,x_2)+c_2\max(0,-x_2)$ being piecewise linear, with no explicit starvation cost ($x=0$) as in [53] since, unlike for the analysis in [53], we conjecture that starvation effects ($x_1=0, \alpha_2=0$) will ultimately materialize as a decrease in the surplus x_2 of finished products relative to where it would have stood at had there been no starvation. This should eventually lead to an increase in the resulting average backlog costs.

With the help of these definitions, the optimal production control problem can now be stated. Find an admissible DHP policy (if it exists) which achieves the long term average cost J^* defined below,

$$J^* = \inf_{U(X, \alpha) \subset \pi_h^*} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ E_\alpha \left(\frac{1}{T} \int_0^T g(X) dt \right) / X(0), \alpha(0) \right\} \right] \quad (1)$$

where π_h^{ad} is the set of admissible DHP controls, $X=(x_1, x_2)^T$, along with the following state equation and associated constraints:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 - u_2 \\ \dot{x}_2 = u_2 - d \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq u_1 \leq \alpha_1 k_1 \\ 0 \leq u_2 \leq \alpha_2 k_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq Z_1 \\ -\infty < x_2 \leq Z_2 \end{cases} \quad (2)$$

Throughout the analysis, it is assumed that $k_1 \geq k_2$. Note that the class of DHP policies is parameterized in this case by arbitrary non negative constant hedging levels Z_1 and Z_2 , and the control structure is more precisely defined by the following set of equations:

$$\begin{cases} u_1(x, \alpha) = \begin{cases} k_1 \alpha_1(t) & \text{if } 0 \leq x_1(t) < Z_1 \\ u_2(t) \alpha_1(t) & \text{if } x_1(t) = Z_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ u_2(x, \alpha) = \begin{cases} k_2 \alpha_2(t) & \text{if } \begin{cases} x_2(t) < Z_2 \text{ and} \\ x_1(t) > 0 \text{ or } \alpha_1(t) = 1 \end{cases} \\ d \alpha_2(t) & \text{if } \begin{cases} x_2(t) = Z_2 \text{ and} \\ x_1(t) > 0 \text{ or } \alpha_1(t) = 1 \end{cases} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Furthermore, note from (3) that: a) each control law u_i ($i=1, 2$) *strives to maintain as long as possible* its marginal hedging level Z_i , b) only *immediate upstream and downstream information* is needed to achieve that goal (decentralized control structure). Finally, the admissible range of hedging level Z_1 is defined to be the one which yields an ergodic system (long term feasibility of the constant demand). Thus, in the very spirit of Bielecki and Kumar [13], we work with a *parameter optimization* problem rather than an optimal control problem. Indeed, our aim is to find within the above

defined suboptimal class of DHP policies, the critical hedging points Z_1^* and Z_2^* which minimize the total average production cost.

DHP policies for a two-machine system have been suggested and studied by Yan, Yin and Lou [50] as a good class for suboptimal control. However, unlike the perturbation analysis technique proposed in [50] which might require intensive computations for the optimal parameters search, the optimization methodology initiated in the next section attempts to build upon a number of analytical results relating to single machine systems, via appropriate complexity reducing decoupling principles.

3. Approximate analysis of DHP policies

In this section, we present the foundations of an approximate analysis of DHP policies. The proposed analysis crucially depends on the application of a *machines decoupling approximation step*, followed by the application of an *averaging principle* hereon referred to as the *demand averaging principle (DAP)*. We now discuss these steps in further details.

3.1 Machines decoupling approximation step (MDA)

A two-machine flow shop shown in Figure 1 can be decomposed intuitively into two isolated single machines as in Figure 2. While individual machines can influence the *statistical parameters* associated with either supply reliability for M_2 or demand stochasticity of machine M_1 , once this influence is accounted for, the two dynamics under control are viewed approximately as *independent stochastic processes*. It is clear that, in reality, there is a measure of correlation between the supply reliability on-off process and the state of M_2 (for example x_1 cannot go to zero unless M_2 is on). We

conjecture that if the mean first return time to buffer emptiness say $\mu_1(Z_1)$ is much larger

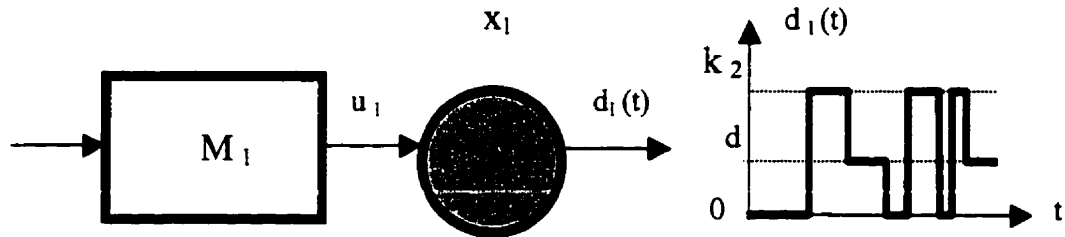


Fig. 2-1: Machine M_1 with a stochastic demand $d_1(t)$

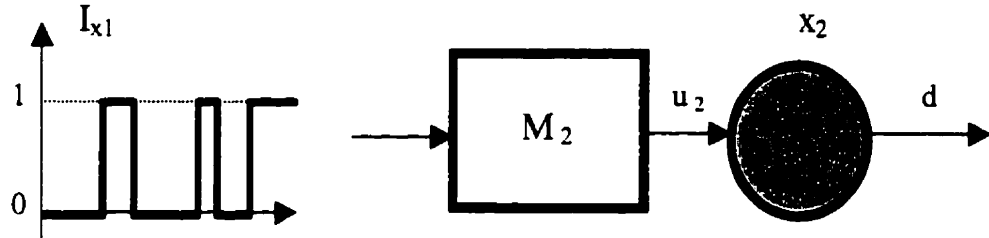


Fig. 2-2: Machine M_2 with an unreliable supply process I_{x1}

Figure 2: Decomposition scheme of a two-machine flow shop

than the mean on-off cycle, $1/r_2 + 1/p_2$, of machine M_2 , then the $I(x_1 > 0)$ binary (supply availability) process where $I(\cdot)$ denotes the characteristic function of a set, “sees” the average behavior of M_2 in the “on” part of its cycle (and thus becomes virtually independent of the instantaneous fluctuations of M_2), while in the “off” part, due to the $k_1 > k_2$ assumption, starvation effects depend strictly on the behavior of M_1 . Furthermore, note that both feasibility of the demand and optimization requirements dictate that Z_1 (and thus $\mu_1(Z_1)$) remain sufficiently high. Once the machines are decoupled as two stochastically independent subsystems, the link between the two being established through the parameters associated with the statistics of the corresponding processes, the analysis of the isolated upstream subsystem can be greatly facilitated following an application of the *demand averaging principle* which we now discuss.

3.2 Demand averaging principle (DAP)

Since the downstream machine M_2 (source of stochastic demand $d_1(t)$; see Fig. 1) operates under a hedging control policy, the stochastic demand process $\{d_1(t)\}$ for machine M_1 takes values in the set $\{k_2, d, 0\}$. Although the characterization of the $\{d_1(t)\}$ stochastic process as viewed from M_1 may in general be a complex task, it so happens (under the ergodicity assumption) that the upstream production cost

$$J_{1,\pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t c_1 x_1(\tau) d\tau = c_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_1(\tau) d\tau = c_1 E(x_1) \quad (4)$$

is influenced mostly by $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t d_1(\tau) d\tau = d$ (since a necessary condition for ergodicity is the stability of the $x_1(t)$ and $x_2(t)$ processes, and thus the average of $d_1(t)$ must be the same as the constant rate of demand for finished parts), as though machine M_1 was subjected to a constant demand rate d of finished parts. This is the so-called *demand averaging principle* (DAP). Strictly speaking, this principle is an approximation. However it is a high quality approximation as sample numerical evidence reported in Appendix 3 shows. Also, in Appendix 3, we develop qualitative arguments that justify the use of this approximation and quantitative ones shown later in Figure 7 and in Table A.3.1 arose from Monte Carlo experiments.

The above principle is in effect a *virtual transparency principle* indicating that everything happens as though machine M_2 was missing and M_1 was responding directly to customer demand. Summarizing in this context, the DAP states that as viewed from M_1 , the cost of maintaining a given critical level of work-in-process is the same that would be incurred by a single machine with completely reliable supply, the failure characteristics of machine M_1 , and a *constant rate of demand* for finished parts d .

3.3 Application of the DAP to the analysis of the upstream subsystem

Three useful results deriving from an application of the DAP idea are investigated in this section. The first result is that for a given Z_1 , the upstream cost is available analytically. The second result is that the DAP idea permits the computation of moments of the first return random variable associated with excursions of work-in-process (WIP) away from and back to zero. This in turn permits the construction of a multi-mode approximate Markovian model of the downstream Machine.

3.3.1 Exact computation of the upstream cost

Using the DAP idea, it is possible to view the upstream machine as a single *HU type of machine* (two-state, no backlog permitted, constant demand). The analytical expression of the upstream cost is then given by (see Hu [55]):

$$J_1(a) = \frac{c_1 k_1}{(p_1 + r_1)(1 - \rho)} - \frac{c_1 k_1 (1 - a(Z_1))}{p_1(1 - \rho)} \quad (5)$$

$$- \frac{\rho}{r_1(1 - \rho)} \left(c_1 - c_1 \frac{(r_1 + p_1)(1 - a(Z_1))}{p_1(1 - \rho)} \right) \text{Log} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{p_1(1 - \rho)}{\rho(r_1 + p_1)(1 - a(Z_1))} \right)$$

where

$$\rho = \frac{r_1(k_1 - d)}{p_1 d} > 1, \quad \lambda = -(1 - \rho) \frac{p_1}{k_1 - d} > 0, \quad a(Z_1) = 1 - \frac{p_1}{p_1 + r_1} \frac{1 - \rho}{1 - \rho e^{\lambda Z_1}} \quad (6)$$

Thus, the long term time fraction for which the buffer is empty will be given by:

$$P_{Z_0} = \frac{p_1}{(p_1 + r_1)} \frac{(1 - \rho)}{(1 - \rho e^{\lambda Z_1})} = 1 - a(Z_1) \quad (7)$$

and the idea behind the choice of $a(Z_1)$, the so-called availability coefficient, as a new design parameter will become apparent later. Note that at this stage, we are not interested in the marginal minimization of $J_1(Z_1)$ as was the case in the decomposition

approach suggested by Hu [53] for a tandem two-machine. Again, unlike in this analysis, we do not associate a direct cost with the starvation of machine M_2 given that we consider that any cost accruing from starvation effects will show up at machine M_2 as an increase in average backlog. We view the role of Z_1 only as a mean to bolster the effective reliability of machine M_2 . Let us now examine the second useful result deriving from an application of DAP to the upstream machine.

3.3.2 Generation of the moments of the *first return-time to buffer emptiness*

The first, second, and higher order moments (respectively denoted μ_1, μ_2, \dots) of the first return-time to buffer emptiness ($x_1(t)=0$) could be generated by adapting Lemma 1 in El-Férik and Malhamé [54] to the current situation where backlog is not allowed ($x_1 \geq 0$). Details regarding the generation of the μ_i 's ($i=1, 2, \dots$) are presented in Appendix 2.

Exact expression of the first moments

The analytical expressions of the first two moments obtained using the algorithm in Appendix 1 (with $v_1=k_1-d$ and $v_2=-d$) are as follows:

$$\begin{aligned} \mu_1(Z_1) &= \left(\frac{p_1 + r_1}{p_1 r_1} \right) \frac{(1 - \rho e^{\lambda Z_1})}{(1 - \rho)} - \frac{1}{r_1} = \frac{-p_1(v_1 - v_2) + (r_1 + p_1)v_1 e^{\lambda Z_1}}{p_1(p_1 v_2 + r_1 v_1)} \quad (8) \\ \mu_2(Z_1) &= \left(\begin{aligned} &2 \frac{p_1 v_2 (v_1 - v_2)^2}{(v_2 p_1 + r_1 v_1)^3} + 2 \frac{r_1 v_1^3 (r_1 + p_1)^2}{p_1^2 (v_2 p_1 + r_1 v_1)^3} e^{2\lambda Z_1} \\ &\left(\begin{aligned} &4 v_1 v_2 (v_2^2 p_1^2 - v_1^2 r_1^2) e^{-\lambda Z_1} \\ &+ 2 v_1 v_2 (3 r_1 v_2 - v_1 p_1) (v_2 p_1 + r_1 v_1) e^{\lambda Z_1} \\ &+ 2 (r_1 + p_1) (v_2^2 p_1^2 - v_1^2 r_1^2) (v_1 - v_2) Z_1(a) e^{\lambda Z_1} \end{aligned} \right) \\ &+ \frac{\quad}{v_2 p_1 (v_2 p_1 + r_1 v_1)^3} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

The analytical expressions of higher order moments μ_i ($i \geq 3$) have also been computed in all generality, but are too complex to report here. The above expressions were obtained using MAPLE V (see Darren-Redfern, [56]).

Availability coefficient of the work-in-process

Using the key renewal theorem (see Ross [57]), the availability coefficient (a) of x_1 can be obtained as follows:

$$a = \frac{\mu_1(Z_1)}{\mu_1(Z_1) + \frac{1}{r_1}}, \quad \text{so that} \quad \mu_1(Z_1) = \frac{a}{r_1(1-a)} \quad (9)$$

This a is denoted $a(Z_1)$ to emphasize its dependency on Z_1 in (7). Clearly, a is a normalized physical variable ($0 \leq a < 1$) which could independently replace Z_1 throughout this paper, since recalling (8) and (9), they are connected by:

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{1}{\lambda} \text{Log} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{p_1(1-\rho)}{\rho(r_1 + p_1)} \frac{1}{(1-a)} \right) \\ a = 1 - \frac{p_1}{(p_1 + r_1)} \frac{(1-\rho)}{(1 - \rho e^{\lambda Z_1})} \end{cases} \quad (10)$$

Since the conditions $Z_1 \geq 0$ and $\lambda > 0$ must be satisfied in order to meet demand, (6), (10) imply that:

$$\frac{1}{1 + \frac{p_1}{r_1}} \leq a < 1 \quad (11)$$

From (11), we conclude that $0.5 < a < 1$ since in practice r_1 will be greater than p_1 . Thus, assuming $r_2 > p_2$, the starvation coefficient $a_s = (1-a) r_2 / (r_2 + p_2)$ of machine M_2 is

such that $0 < a_1 < 1/4$. This conclusion is consistent with the very low values of starvation coefficients reported by Bai and Gershwin [51] based on heuristics. Indeed, a maximum starvation coefficient $a_{\text{max}} = 0.167$ has been observed from 24 samples two-machine systems investigated in [51].

Coefficient of variation of the return time to buffer emptiness

The *coefficient of variation* of a random variable is defined as the ratio of its standard deviation to its mean (see Griffiths, [58]). Thus, the coefficient of variation of the *first return-time* to the upstream buffer emptiness is given by:

$$c^2(a) = \frac{\mu_2(Z_1(a)) - (\mu_1(Z_1(a)))^2}{(\mu_1(Z_1(a)))^2} \quad (12)$$

Recall that an arbitrary distribution can be viewed as quasi-exponential if its coefficient of variation is close to one. This remark will help us later in Section 4 for the validation of a forthcoming approximate Markovianized representation of machine M_2 .

3.4 Approximate Markovian representation of machine M_2

3.4.1 Foundations of the approximate Markovianization

When viewed from the downstream machine, the *upstream supply variable* $Ix_1(t)$ behaves as a binary random process ($x_1 > 0$ and $x_1 = 0$ respectively). Under the decoupling approximation it evolves *independently* from the downstream machine. At this stage, an *approximate Markovianization* of the process $Ix_1(t)$ will be helpful. A p^{th} order Markovianized representation of the first return-time to buffer emptiness, could be

computed from a sufficient number of moments μ_i 's ($i=1, 2, \dots$) using the Padé approximants approach presented in El-Ferik and Malhamé [54]). In order to keep the level of complexity under control, we rely on the simplest Markovian approximation of the first return random variable. It depends strictly on the first moment (expected return time μ_1). Thus, the supply process I_{x_1} could be approximated by means of a two-state Markov chain with mean time to OFF equal to μ_1 and mean time to ON equal to $1/r_1$ (recall that $k_1 \geq k_2$ by assumption). Notice also from (9) that $\mu_1 = a/r_1(1-a)$, in which case the transition rate of the process I_{x_1} from ON to OFF could be written down as follows:

$$p_0(a) = \frac{1}{\mu_1(Z_1(a))} = r_1 \frac{(1-a)}{a} \quad (13)$$

Such a highly simplified representation of the I_{x_1} process leads to good results as will become clear in Section 4 where numerical evidence over a number of test cases suggests that the associated coefficient of variation associated with the ON time of I_{x_1} variable remains close to 1. Given the approximate two-state Markov supply variable I_{x_1} , and the independence assumption relative to M_2 , the *approximate Markovian model for the downstream subsystem* will arise from the *Cartesian product* of both state spaces related respectively to: a) the approximate two-state Markov supply, b) the operational two-state Markov associated with machine M_2 . As shown in Figure 3, the resulting approximate model of machine M_2 is a continuous time, four states Markov process. The states obtained are numbered 1, 2, 3 and 4. The operating state 1 is feasible (demand can be met) and the remaining states 2, 3 and 4 are deficit states. In addition, except in general for state 1, sojourn times in all other states are originally exponential. With the approximate Markovian representation of M_2 thus obtained, the path is cleared for an optimization of hedging point Z_2 using standard single-part multi-mode machine theory [23].

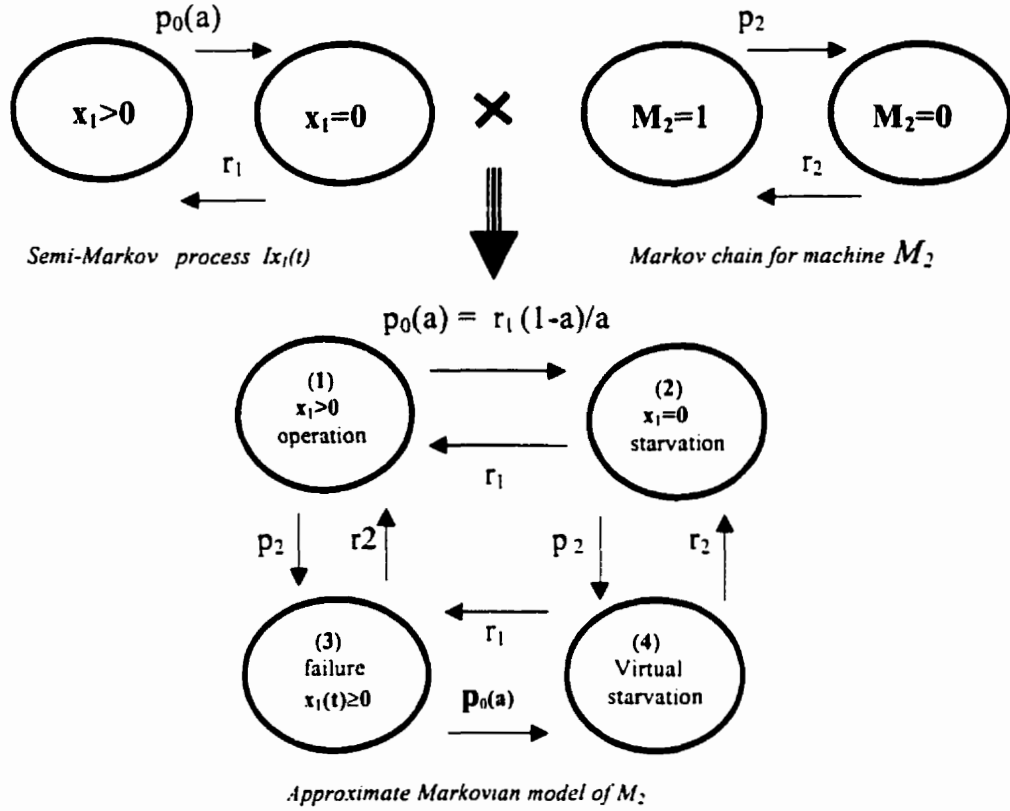


Figure 3: Approximate four-state Markovian Model of M_2

3.4.2 Optimal downstream cost and hedging point $Z_2^*(a)$

In the following, a condition on the parameters of the equivalent machine of Fig. 3 is first derived to ensure the ergodicity of the resulting production process. Subsequently, a Sharifnia type of calculation is applied to the multi-mode machine of Fig. 3 to compute for a given coefficient a , the optimal parameterized optimal hedging level $Z_2^*(a)$ and cost $J_2^*(a)$. We first present additional notations needed further: a^* (optimal availability coefficient a assuming it exists), $Z_1^*(a)$ (optimal hedging level associated with machine M_2), $J_1(a)$ (average cost of maintaining critical buffer level

$Z_1(a)$), $J_2(a, Z_1)$ (average cost of maintaining critical inventory level Z_1 under availability coefficient a), $J_2^*(a)$ (downstream production cost for the optimal critical inventory level), $J^{**}=J_1(a^*)+J_2^*(a^*)$ (overall optimal cost).

Admissible bounds on the availability coefficient a

Given the production downstream production subsystem of Figure 3 with velocity matrix:

$$V_2 = \text{Diag}(k_2, -d, -d, -d, -d) \quad (14)$$

the intensity matrix of M_{2eq} being,

$$\Lambda_2(a) = \begin{pmatrix} -(p_2 + p_0(a)) & p_0(a) & p_1 & 0 \\ r_1 & -(r_1 + p_2) & 0 & p_2 \\ r_2 & 0 & -(r_2 + p_0(a)) & p_0(a) \\ 0 & r_2 & r_1 & -(r_1 + r_2) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

a necessary and sufficient ergodicity criterion requires that the average capacity of the system must be greater than the demand (Malhamé [27]). Let the vector $\pi(a) = [\pi_1(a) \pi_2(a) \pi_3(a) \pi_4(a)]$ denote the unique stationary distribution of the irreducible Markov chain M_{2eq} . It is straightforward to show that:

$$\pi(a) = \left[\frac{a r_2}{r_2 + p_2}, \frac{(1-a)r_2}{r_2 + p_2}, \frac{a p_2}{r_2 + p_2}, \frac{(1-a) p_2}{r_2 + p_2} \right] \quad (16)$$

Given that 1 is the only *feasible mode* (mode for which production capacity exceeds demand), the ergodicity condition $\pi_1(a) k_2 > d$ is equivalent to $(d/k_2)(r_2 + p_2)/r_2 < a < 1$. Together with (11), the global ergodicity constraint can be written as follows:

$$\max \left(\frac{r_1}{r_1 + p_1}, \frac{(r_2 + p_2)}{r_2} \frac{d}{k_2} \right) < a < 1 \quad (17)$$

Analysis of the downstream cost

An alternative and equivalent ergodicity criterion (see Malhamé [26, 27]) reveals that a matrix such as $A_2(a) = (V_2)^{-1} \Lambda_2^T(a)$ with dimension $n=4$ and $m=1$ feasible mode must have exactly $n-m$ ($=3$ in this case) eigenvalues with positive real part, *one* zero eigenvalue $\gamma_1=0$, and exactly $m-1$ ($=0$ in this case) eigenvalues with negative real part. Under the assumption of this ergodicity criterion for V_2 and $\Lambda_2(a)$ given by (13) and (14) respectively, the hybrid probability density functions $f_i(a, x_2)$ $i=1, \dots, 4$, and the marginal probability density function $f(a, X_2)$ would take the form (Algoet, [22], Sharifnia [23], Malhamé [26, 27]):

$$\begin{cases} f_i(a, Z_2, X_2) = \sum_{j=2}^4 C_j(a) w_j(a, i) e^{\gamma_j(a)(X_2 - Z_2(a))} & \text{for } i = 1, \dots, 4 \\ f(a, Z_2, X_2) = \sum_{j=2}^4 \left(\left(C_j(a) \sum_{i=1}^4 w_j(a, i) \right) e^{\gamma_j(a)(X_2 - Z_2(a))} \right) \end{cases} \quad (18)$$

where $w_j(a, i)$ is the i^{th} component of the j^{th} eigenvector associated with the j^{th} eigenvalue $\gamma_j(a)$ for $j=2, 3$ and 4 . In (18), $f_i(a, Z_2, x_2) dx_2 = P_i[(x_2 \leq X_2 \leq x_2 + dx_2); M_{2eq} \text{ in state } i]$, $i=1, \dots, 4$, and $f(a, Z_2, x_2) dx_2 = P_i[(x_2 \leq X_2 \leq x_2 + dx_2)]$. Furthermore, the constants $C_j(a)$ could be obtained as:

$$\begin{pmatrix} P_{Z_2}(a) \\ C_2(a) \\ C_3(a) \\ C_4(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(p_2 + p_0(a))}{k_2 - d} & w_2(a,1) & w_3(a,1) & w_4(a,1) \\ -\frac{p_0(a)}{d} & w_2(a,2) & w_3(a,2) & w_4(a,2) \\ -\frac{p_2}{d} & w_2(a,3) & w_3(a,3) & w_4(a,3) \\ 1 & \frac{\sum_{i=1}^4 w_2(a,i)}{\gamma_2(a)} & \frac{\sum_{i=1}^4 w_3(a,i)}{\gamma_3(a)} & \frac{\sum_{i=1}^4 w_4(a,i)}{\gamma_4(a)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

with $P_{Z_2}(a)$ denoting the steady-state probability mass at Z_2 . Thus, the associated downstream cost:

$$J_2(a, Z_2) = c_2^+ Z_2 \cdot P_{Z_2} + \int_{-\infty}^{Z_2} (c_2^+ X_2^+ + c_2^- X_2^-) f(a, Z_2, x_2) dx_2 \quad (20)$$

takes the closed form:

$$\begin{aligned} J_2(a, Z_2) = & c_2^- \left(P_{Z_2}(a) + \sum_{j=2}^4 \left(\frac{C_j(a)}{\gamma_j(a)} \sum_{i=1}^4 w_j(a,i) \right) \right) Z_2 - c_2^+ \sum_{j=2}^4 \left(\frac{C_j(a)}{\gamma_j^2(a)} \sum_{i=1}^4 w_j(a,i) \right) \\ & + (c_2^+ + c_2^-) \sum_{j=2}^4 \left(\frac{C_j(a)}{\gamma_j^2(a)} e^{-\gamma_j(a) Z_2} \sum_{i=1}^4 w_j(a,i) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Clearly, for any admissible a (or equivalently Z_1), the downstream optimal hedging point $Z_2^*(a)$ could be obtained from (21) by solving $\partial J_2(a, Z_2) / \partial Z_2 = 0$ for Z_2 . Thus, the optimal $Z_2^*(a)$ satisfies the following nonlinear equation:

$$\sum_{j=2}^4 \left(\frac{C_j(a)}{\gamma_j(a)} e^{-\gamma_j(a) Z_2^*(a)} \sum_{i=1}^4 w_j(a,i) \right) = \frac{c_2^+}{(c_2^+ + c_2^-)} \left(P_{Z_2}(a) + \sum_{j=2}^4 \left(\frac{C_j(a)}{\gamma_j(a)} \sum_{i=1}^4 w_j(a,i) \right) \right) \quad (22)$$

Numerical experimentation with MATLAB Software [59] (see *fmin.m*, *fmins.m* and *fzeros.m*) or MAPLE V (see *minimize.mws*, *minimize.mws*, *solve.mws* and *fsolve.mws* in Darren-Redfern [56]) suggests that it is easier to numerically solve (22) than it is to optimize (21).

3.5 Optimal total cost and hedging points ($Z_1^* = Z_1(a^*)$ and $Z_2^{**} = Z_2^*(a^*)$)

By summing (5) and (21) after it has been optimized with respect to Z_2 for a given a (or equivalently Z_1), the optimal upstream hedging point is obtained from the following one-dimensional closed form optimization problem:

$$J^{**} = \inf_a \left(\begin{aligned} & \frac{c_1 k_1}{(p_1 + r_1)(1 - \rho)} - \frac{c_1 k_1 (1 - a)}{p_1 (1 - \rho)} \\ & - \frac{\rho}{r_1 (1 - \rho)} \left(c_1 - c_1 \frac{(r_1 + p_1)(1 - a)}{p_1 (1 - \rho)} \right) \log \left(\frac{1}{\rho} - \frac{p_1 (1 - \rho)}{\rho (r_1 + p_1)(1 - a)} \right) \\ & + c_2^- \left(P_{Z_2^*}(a) + \sum_{j=2}^J \left(\frac{C_j(a)}{\gamma_j(a)} \sum_{i=1}^J w_j(a, i) \right) \right) Z_2^*(a) \\ & - c_2^+ \sum_{j=2}^J \left(\frac{C_j(a)}{\gamma_j^2(a)} \sum_{i=1}^J w_j(a, i) \right) \\ & + (c_2^+ + c_2^-) \sum_{j=2}^J \left(\frac{C_j(a)}{\gamma_j^2(a)} e^{-\gamma_j(a) Z_2^*(a)} \sum_{i=1}^J w_j(a, i) \right) \end{aligned} \right) \quad (23)$$

and the unknown optimal hedging points are computed from the solution a^* if it exists from:

$$Z_1^* = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{1}{\rho} - \frac{p_1 (1 - \rho)}{\rho (r_1 + p_1)} \frac{1}{(1 - a^*)} \right), \quad Z_2^{**} = Z_2(a^*) = \text{solution of (22)} \quad (24)$$

Finally, in order to numerically solve (22) and (23), an initial condition a_0 is required for the availability coefficient a .

3.6 Initializing the proposed optimization scheme

A suboptimal initial condition a_0^* could be derived from the analysis of a further simplified two-state aggregated machine version of machine M_{2eq} (see Appendix 2 for more details). Based on the first order Taylor approximation of the first derivatives of the production costs, the value obtained from this highly simplified analysis is as follows:

$$a_0^* = \frac{(\tilde{J}_1''(a_1) + \tilde{J}_2''(a_1))a_1 - (\tilde{J}_1'(a_1) + \tilde{J}_2'(a_1))}{\tilde{J}_1''(a_1) + \tilde{J}_2''(a_1)} \quad (25)$$

where a_1 is chosen in the left neighborhood of $a_{\max}=1$, whereas $(\tilde{J}_1'(a_1), \tilde{J}_1''(a_1))$ and $(\tilde{J}_2'(a_1), \tilde{J}_2''(a_1))$ denote first and second derivatives of the corresponding costs (see Appendix 2). Now for the sake of clarity, let us organize the whole optimization algorithm developed above into a hierarchical computational structure.

3.7 Hierarchical optimization scheme

The whole procedure presented in Section 3 can be organized into the hierarchical optimization scheme (Fig. 4). At the lower level, an optimization *subproblem* consisting of a single equation (22) is numerically solved to obtain $Z_2^*(a)$ for any value of the availability coefficient a . Then, a higher level *optimization problem* defined by (23) is solved. Then the optimization procedure is repeated until the

optimum a^* is reached (if it exists), and the optimal hedging points Z_1^* and Z_2^{**} are then computed from (24). Note that each step of this optimization scheme can be carried out almost instantly given the analytical nature of (22) and (23), as well as the optimal initialization given by (25).

4. Numerical sample systems

In this section, optimization results for the class of DHP policies are reported using the theory and algorithms developed in Section 3. A wide set of sample two-machine systems listed in Table 1 are used. S_1 is the nominal system while S_2 - S_3 are deduced from S_1 by a *decrease* in the backlog cost coefficient. Furthermore, S_4 - S_5 involve an *increase* in the storage cost coefficient, and S_6 - S_7 deal with an *increase* in the inventory cost coefficient. Finally, S_8 - S_9 illustrate the effect of a *decrease* in the repair rate of both machines for a balanced line. For each sample two-machine system, the corresponding approximate optimal hedging points (Z_1^*, Z_2^{**}) and costs (J_1^*, J_2^{**}) are computed following the optimization scheme presented in Figure 4. Furthermore, using a discretization step of 0.01 for the availability coefficient a candidates within the suboptimal class of DHP policies are scanned and their theoretically computed performance is obtained almost (instantaneously) and validated against (very lengthy) Monte Carlo simulations.

4.1 Application of the DHP policies

In the following, we investigate the application of DHP policies in detail for the particular case of the sample two-machine system S_1 . Further results obtained for all $S_i (i=1, \dots, 10)$ are summarized in subsection 4.3.

4.1.1 Coefficient of variation of availability periods

From Equations (8) and (12), the following quantities are calculated immediately in the case of S_1 :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -5 + 15 e^{\frac{1}{3}Z_1}, \quad \mu_2 = -10 - 330 e^{\frac{1}{3}Z_1} + 540 e^{\frac{2}{3}Z_1} - 70 Z_1 e^{\frac{1}{3}Z_1} \\ c^2 &= -\frac{1}{5} \frac{\left(7 + 14 Z_1 e^{\frac{1}{3}Z_1} - 63 e^{\frac{2}{3}Z_1} + 36 e^{\frac{1}{3}Z_1} \right)}{\left(3 e^{\frac{1}{3}Z_1} - 1 \right)^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Using (26) and recalling that Z_1 and a are connected by (10), the graph of the coefficient of variation $c^2(a)$ can be obtained and is shown in Fig. 5. Since $c^2(a)$ remains in a reasonable neighborhood of 1 (perfect exponential distribution), it is quite reasonable to approximate the first return-time to buffer emptiness by an exponential distribution as in Section 3.3.

4.1.2 Predicted performances

Using an optimization tolerance $da=0.01$, we have initialized Eq. (23) with $a_0^*=0.92$ given by (25) which is very close to the obtained optimum $a^*=0.95$ (see Figure 6 for the summary of results). Despite the fact that global optimality was attained very quickly, we have intentionally extended the computation over the whole admissible range of a because some interesting findings could be pointed out from the complete shape of computed quantities. These findings are summarized as follows:

- The suboptimal initial parameter $a_0^*=0.92$ appears to be very close to the optimum $a^*=0.95$.
- As a approaches 1, the upstream cost $J_1(a)$ goes to infinity while the downstream cost $J_2^*(0.9999)=11.4693$ converges to the Bielecki-Kumar limiting cost $J_{2BK}=11.4642$

- The overall cost appears to be strictly convex, with a unique minimum (Fig. 6).
- An increase in a gives rise to a decrease in the downstream cost $J_2(a)$ and to an increase in $J_1(a)$. Both monotonicity results are expected since a rise in a comes at the expense of a higher hedging level for the WIP, while because of the resulting higher supply availability, the requirements for a *safety stock of finished parts* (as a hedge against uncertainty) is reduced. The latter monotonicity result was mathematically established by Liberopoulos and Hu [60], Sethi and Zhang [41].
- At $a^*=0.95$, the sum of the slopes of costs (upstream and downstream) is exactly zero.
- In Fig. 5, at the optimum $a^*=0.95$, the coefficient of variation is $c^2=1.01$.

In the next section, the theoretical results for S_i are tested against Monte Carlo simulations under the same class of decentralized hedging production policies.

4.2 Monte Carlo costs for the same class of DHP policies

A Markov failure generator and a Monte Carlo simulation model have been built, tested and used to validate the theoretical performance computations associated with the proposed hierarchical DHP optimizations scheme.

The Markov failure generator is designed from well tested algorithms (see Sethi and Zhang [41], and Naylor et al. [61]). For any sample two-machine system S_i ($i=1,...,10$), given $Z_1(a)$ and $Z_2^*(a)$ delivered in each case by our theoretical DHP computations, the corresponding Monte Carlo costs have been computed over the whole admissible range of a . From the comparison of results shown in Figure 7 for the case of system S_1 , additional remarks can be made:

- Monte Carlo costs are very close to their predicted values
- The upstream costs emerging from the Monte Carlo simulations are in fact similar (thus strengthening the case for DAP) to the predicted shape over the whole admissible range of a .

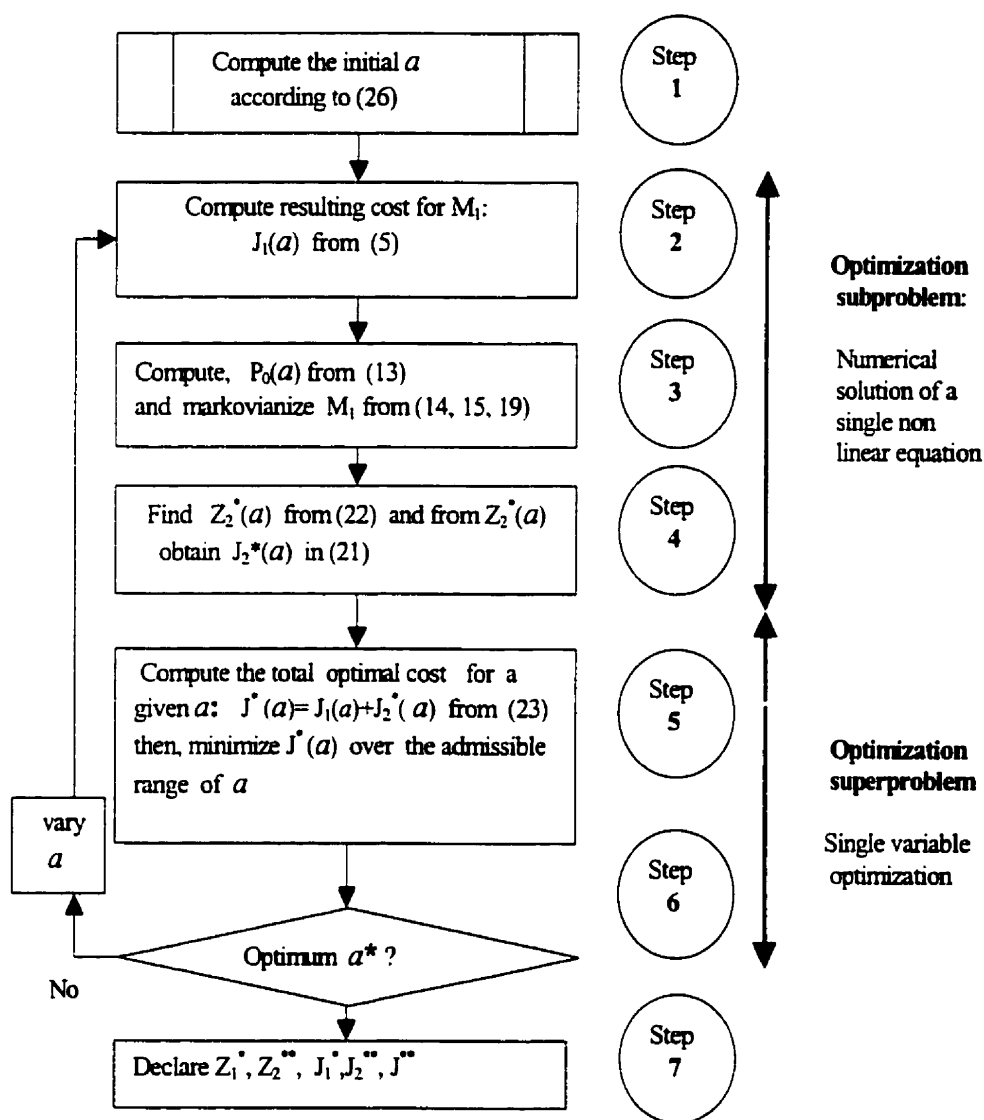


Figure 4: Hierarchical optimization scheme

S	Data									
	k_1	k_2	d	r_1	r_2	p_1	p_2	c_1	c_2^+	c_2^-
S_1	2.5	2	1	0.4	0.6	0.1	0.3	2	2	10
S_2	2.5	2	1	0.4	0.6	0.1	0.3	2	2	8
S_3	2.5	2	1	0.4	0.6	0.1	0.3	2	2	6
S_4	2.5	2	1	0.4	0.6	0.1	0.3	2	6	10
S_5	2.5	2	1	0.4	0.6	0.1	0.3	2	8	10
S_6	2.5	2	1	0.4	0.6	0.1	0.3	6	2	10
S_7	2.5	2	1	0.4	0.6	0.1	0.3	8	2	10
S_8	2	2	1	0.6	0.6	0.1	0.1	1	2	10
S_9	2	2	1	0.5	0.5	0.1	0.1	2	2	10
S_{10}	2	2	1	0.4	0.4	0.1	0.1	2	2	10

Table 1: Numerical sample systems (S_1 is the nominal system and changes in the off-nominal systems are highlighted).

- The observations reported in the case of system S_1 , could in fact be reasonably well extended to the remaining systems S_2 - S_{10} . Notice however, as anticipated in the discussions on the quality of the machine decoupling approximation in section 3.1, whenever $Z_1(a^*)$ decreases because of an increase in WIP storage costs as in case S_6 , the error on cost prediction appears to increase. However, the cost estimates remain quite acceptable.

4.3 Summary of the main results

The same types of simulations presented in Section 4.1 and 4.2 in the case of the sample two-machine system S_1 , have been performed for all sample systems S_1 - S_{10} listed in Table 1. The corresponding results are summarized in Table 2.

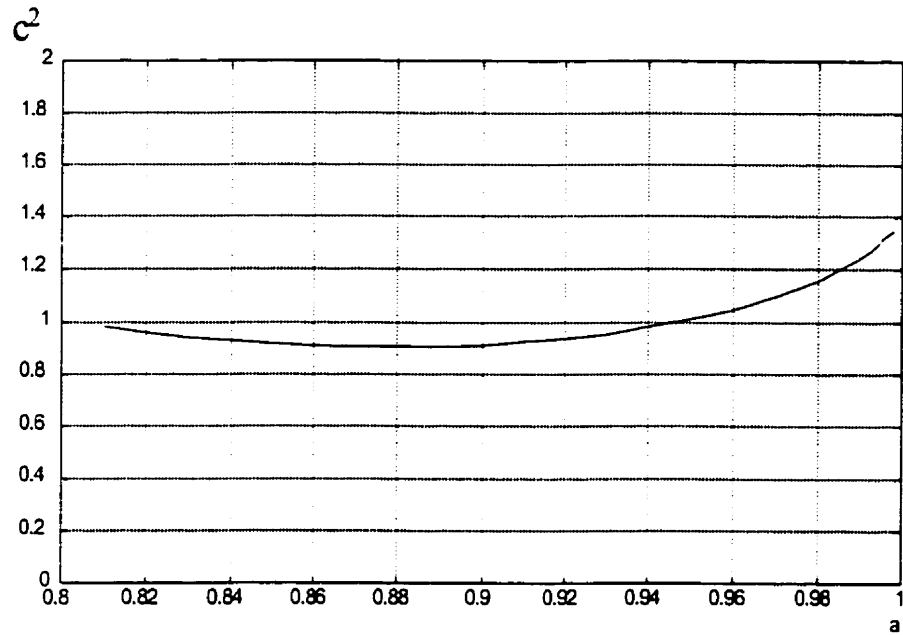


Figure 5: Coefficient of variation of availability periods
(Nominal System S_1)

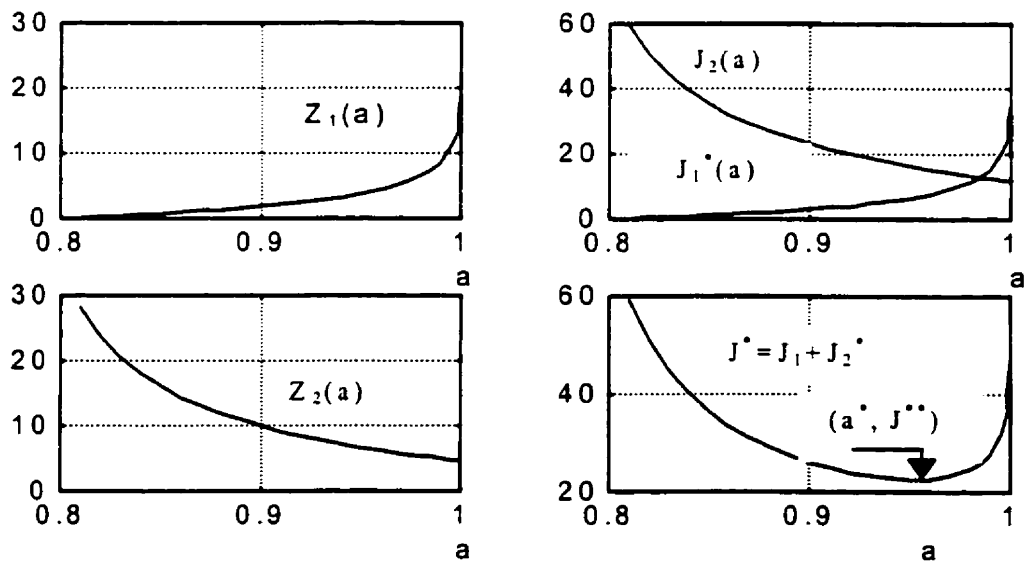


Figure 6: Predicted hedging points $Z_1(a)$, $Z_2^*(a)$ and associated costs for system S_1

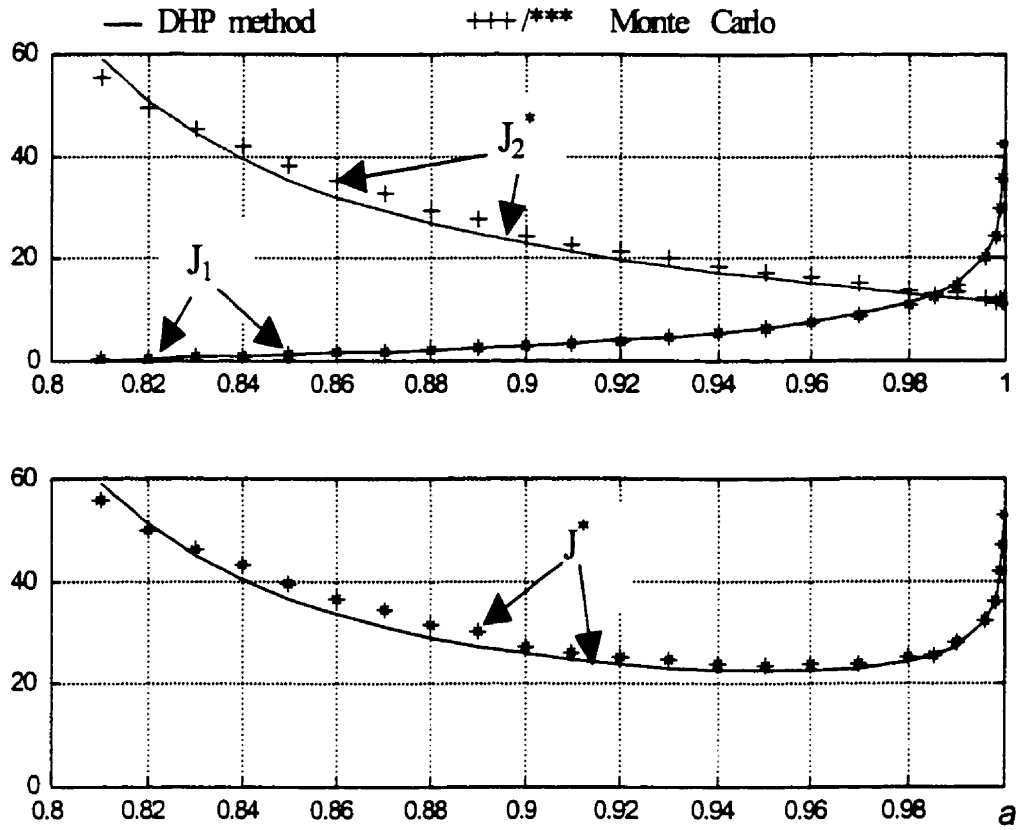


Figure 7: Comparison of the DHP method and the Monte Carlo simulations

The first three sub-colons attest to the fact that the initial condition a_0^* suggested in (25) with $a_1=0.95$ is generally located very near the optimum a^* . From the fourth subcolon, we observe that values of c^2 are in general close to 1, thus the exponential assumption made in Subsection 3.3 is quite acceptable. Z_1^* , Z_2^* , $J_{1\text{ DH}}^*$, $J_{2\text{ DH}}^*$ are predicted hedging points and costs respectively, while $J_{1\text{ MC}}^*$, $J_{2\text{ MC}}^*$ are Monte-Carlo costs computed according to (29). The last two quantities represent in principle the real performances recorded from the implementation of the DHP policies on the original tandem two-machine system. Note that for all cases, $J_{1\text{ DH}}^*$ and $J_{1\text{ MC}}^*$ are quite similar due to the DAP property. Note also that the approximated Markovian model adopted for the downstream machine works well since the values of $J_{2\text{ DH}}^*$ and $J_{2\text{ MC}}^*$ remain

reasonably close, even when the coefficient of variation deviates by as much as 10 % from unity. The worst case computation is accurate within 15 %. The mean relative error is 7.4 %.

5. Conclusion

Although structurally simple, stochastic tandem manufacturing systems are notoriously complex to analyze from a control point of view as witnessed by an abundant and intricate related literature. The hierarchical optimization scheme proposed in this paper permits to construct, almost instantaneously, approximately optimal policies within the class of DHP policies for an unreliable two-machine flow shop. It is founded on a mix of approximations and analytical results yielding minimal computations, and the resulting accuracy of computations is quite acceptable when validated against numerous Monte Carlo runs. This makes it a good candidate either for real time production control of two-machine flow shops, or for the optimal design of the class of tandem production systems investigated. Numerical evidence suggests that convexity of the overall cost of DHP policies as a function of α appears to hold, but it remains mathematically unproven. This particular issue could be further investigated. The key ideas in this paper point at ways in which DHP policies could be optimized in a N-machine unreliable tandem system. This will be the subject of future research.

Acknowledgement

The authors wish to thank the anonymous reviewers for throwing doubt in their minds as to the mathematical exactness of the demand averaging principle, thus leading them to a better assessment of its nature, and an understanding of some of the reasons why it works so well.

*Table 2: Comparison of the DHP method and the Monte-Carlo simulation:
summary of results*

S	Parameters of the Decentralized Hedging Production Control (DHP)						Production costs					
	a_{mn}	a_0^*	a^*	C_v^*	Z_1^*	Z_2^*	DHP method (Predicted costs)			Monte-Carlo simulation (Costs)		
							J_1^*	J_2^{**}	J^{**}	J_1^*	J_2^{**}	J^{**}
S_1	0.80	0.94	0.95	1.01	3.76	6.71	6.39	16.19	22.58	6.23	17.16	23.39
S_2	0.80	0.94	0.95	1.01	3.76	5.86	6.39	14.48	20.87	6.22	15.87	22.09
S_3	0.80	0.94	0.94	0.98	3.24	5.23	5.47	13.26	18.73	5.35	16.77	22.12
S_4	0.80	0.96	0.97	1.09	5.23	2.49	9.08	22.44	31.52	8.99	23.58	32.57
S_5	0.80	0.96	0.97	1.09	5.23	1.81	9.08	24.38	33.47	8.91	25.25	34.16
S_6	0.80	0.92	0.91	0.92	2.12	9.20	10.48	21.35	31.84	10.36	25.77	36.12
S_7	0.80	0.92	0.90	0.91	1.82	10.00	12.00	22.98	34.98	11.73	25.62	37.34
S_8	0.86	0.94	0.95	0.99	1.87	1.82	1.63	6.56	8.19	1.43	7.41	8.84
S_9	0.75	0.93	0.95	1.03	2.63	2.63	2.23	8.68	10.92	2.00	10.03	12.03
S_{10}	0.80	0.95	0.95	1.09	3.93	4.12	3.26	12.33	15.59	2.95	14.54	17.49

Appendix 1

Moments of the first return-time to buffer emptiness

In this appendix, the moments of the first return-time to buffer emptiness ($X_1=0$) are generated using a version of Lemma 1 in El-Férík and Malhamé [54] specifically adapted to our context.

Probability density $g_{\text{cycle}}(t)$ of the first return-time T_{cycle} to buffer emptiness

Under the adopted hedging production policies, the upstream subsystem operates as a two-state machine with two hedging points Z_1 (for the operating mode) and $Z_0=0$ (for the failure mode), and can be viewed as subjected to a constant demand rate d , given the DAP. The shape of a particular upstream buffer trajectory is illustrated in Figure A.1.

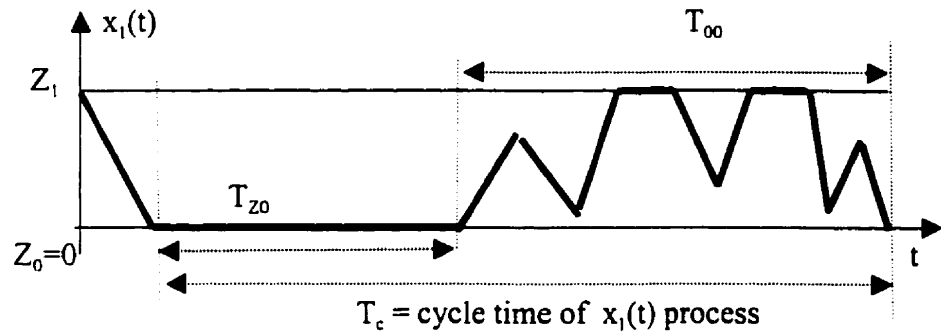


Figure A.1: A trajectory of $x_1(t)$ process

In order to compute the probability density of the return time to buffer emptiness, the same types of notations as in El-Férík and Malhamé [32] will be used here. Thus define: $f_i(x_1)dx_1 = P_r([x_1 < x_1(t) \leq x_1 + dx_1, \alpha_1(t) = i])$ for $i=1, 2$ and $f(x_1, t) = (f_1(x_1, t) \ f_2(x_1, t))^T$; $P_{Z1}(t) =$ probability mass at Z_1 at time t ; $P_{Z0}(t) =$ probability mass at $Z_0=0$ at time t ; $T_c =$ time of first return to buffer emptiness; $T_{Z0} =$ Portion of T_c during which the buffer remains empty; $T_{00} \equiv$ Portion of T_c for which supply is available; $g_{\text{cycle}}(t) =$ probability density function of random time T_c and $g_{00}(t) =$ probability density of return time to buffer emptiness not including sojourn at $Z_0=0$. Furthermore, define the velocity matrix V_1 and the intensity matrix Λ_1 as:

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -p_1 & p_1 \\ r_1 & -r_1 \end{pmatrix}$$

where $\nu_1 = k_1 - d$ and $\nu_2 = -d$.

Then according to Lemma 1 in El-Férík and Malhamé [54], it is possible to obtain $g_{\text{cycle}}(t)$ (density of first return time of $x_1(t)$ to the zero value just after leaving zero):

$$g_{\text{cycle}}(t) = -\nu_2 f_2(Z_0^+, t) \quad (\text{A1.1})$$

where $f_2(Z_0^+, t)$ is computed by solving the following Kolmogorov equations :

$$\frac{\partial f(X_1, t)}{\partial t} = -\nu_1 \frac{\partial f(X_1, t)}{\partial X_1} + \Lambda_1^T f(X_1, t) \quad (\text{A1.2})$$

with boundary conditions,

$$\begin{cases} \lambda_{12}P_{Z_1}(t) + \nu_2 f_2(Z_1^-, t) = 0 \\ \lambda_{21}P_{Z_0}(t) - \nu_1 f_1(Z_0^+, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{P}_{Z_1} = \lambda_{11}P_{Z_1}(t) + \nu_1 f_1(Z_1^-, t) \\ \dot{P}_{Z_0} = \lambda_{22}P_{Z_0}(t) - \nu_2 f_2(Z_0^-, t) \end{cases} \quad (\text{A1.3})$$

Constraints and initial conditions are given by:

$$\begin{cases} f(X_1, t) = 0 \quad \forall \quad X_1 > Z_1 \\ f(X_1, t) = 0 \quad \forall \quad X_1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P_{Z_1}(0) = 1, \quad P_{Z_0}(0) = 0 \\ f(X_1, 0) = 0, \text{ for } 0 < x_1 < Z \end{cases} \quad (\text{A1.4})$$

A straightforward manipulation of the previous expressions rewritten in the Laplace transform domain leads to the following set of algebraic equations:

$$\begin{cases} F(Z_0^+, s) = e^{V_1^{-1}(\lambda_1^T - s)(Z_0 - Z_1)} \begin{pmatrix} F_1(Z_1^-, s) \\ -\frac{v_1}{v_2} \frac{\lambda_{12}}{(s - \lambda_{11})} F_1(Z_1^-, s) \end{pmatrix} \\ F_2(Z_0^+, s) = \frac{1}{v_2} - \frac{v_1}{v_2} \frac{(s - \lambda_{22})}{\lambda_{21}} F_1(Z_0^+, s) \end{cases} \quad (\text{A1.5})$$

with three unknowns $F_1(Z_0^+, s)$, $F_2(Z_0^+, s)$ and $F_1(Z_1^-, s)$ and where capitalization of variables indicates Laplace transforms. Once $F_2(Z_0^+, s)$ is determined, the Laplace transform of the time to first return to buffer emptiness is obtained from (A1.1) as:

$$g_{cycle}(s) = -v_2 f_2(Z_0, s) \quad (\text{A1.6})$$

Since $T_{cycle} = T_{Z_0} + T_{00}$ and the latter two random variables are independent, the convolution theorem yields $G_{cycle}(s) = G_{Z_0}(s) G_{00}(s)$. Note that if the upstream capacity k_1 of M_1 is greater than the downstream capacity k_2 of M_2 , then $G_{Z_0}(t) = r_1 e^{-r_1 t}$ because in this case T_{Z_0} is exponentially distributed with a rate r_1 imposed by the time to repair of the upstream machine M_1 . Thus, the Laplace transform of the supply availability of T_c is given by:

$$G_{00}(s) = G_{cycle}(s) \left(\frac{s + r_1}{r_1} \right) \quad (\text{A1.7})$$

and the moments of $g_{00}(t)$ can now be generated by differentiation of $G_{00}(s)$ as in El-Férík and Malhamé [54]. That is:

$$\mu_i = (-1)^i \frac{d^i G_{00}(s)}{ds^i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{A1.8})$$

A symbolic computation using MAPLE V leads to the generic moment expressions given by (8).

Appendix 2

Initial condition for the proposed optimization scheme

This appendix is devoted to the determination of the suboptimal initial condition a_0^* . Using the Taylor approximation of the derivative of costs (denoted $\frac{d\tilde{J}_1(a)}{da}$ and $\frac{d\tilde{J}_2(a)}{da}$ at $a=a_1$, some arbitrary value close to 1), the optimal initial condition a_0^* is

obtained by solving the equation:

$$\left. \frac{d\tilde{J}_1(a)}{da} \right|_{a_1} + \left. \frac{d\tilde{J}_2(a)}{da} \right|_{a_1} = 0.$$

Upstream cost (expression, derivative, and Taylor approximation)

From (5), if we consider the following new notations :

$$\rho = \frac{r_1(k_1 - d)}{p_1 d}, \quad \psi = \frac{c_1(r_1 + p_1)\rho d}{p_1 r_1(1 - \rho)^2}, \quad \pi_0 = \frac{p_1(1 - \rho)}{\rho(r_1 + p_1)}, \quad \phi = c_1 - c_2 \frac{(r_1 + p_1)}{p_1(1 - \rho)} \frac{\rho}{r_1(1 - \rho)} \quad (\text{A2.1})$$

then, straightforward computations lead to:

$$\begin{aligned} J_1(a) &= \frac{c_1 k_1}{(r_1 + p_1)(1 - \rho)} - \frac{c_1 k_1(1 - a)}{p_1(1 - \rho)} - (\phi + \psi a) \log \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\pi_0}{(1 - a)} \right) \\ \frac{dJ_1(a)}{da} &= \frac{c_1 k_1(1 - a)}{p_1(1 - \rho)} - \psi \log \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\pi_0}{(1 - a)} \right) + \frac{(\phi + \psi a)\pi_0}{(1 - a)^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\pi_0}{(1 - a)} \right)} \\ \left. \frac{dJ_1(a)}{da} \right|_{a_1} &= J_1'(a_1) + J_1''(a_1)(a - a_1) + O(a - a_1)^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

where $O(a - a_1)^2$ indicates remainder terms of the order of $(a - a_1)^2$.

Downstream cost (expression, derivative, and Taylor approximation)

Consider a two-state *aggregated version* of the downstream machine model already shown in Figure 3, whereby all three unproductive modes 1, 2, and 3 have been lumped into one supermode. Then, in view of the limiting probability expression $\pi_1(a)$ in mode one (see (16)), the failure rate $P(a)$ and the repair rate $R(a)$ of the two-state aggregated version of M_2 must satisfy:

$$\begin{cases} P(a) = p_2 + r_1 \frac{1-a}{a} \\ R(a) = \frac{r_2(r_1 + (p_2 - r_1)a)}{p_2 + (1-a)r_2} \end{cases} \quad (A2.3)$$

and the optimal cost for a given a can then be computed using the closed form results of Bielecki and Kumar [13]. This leads to:

$$\tilde{J}_2(a) = c_2^+ \frac{\log\left(\frac{k_2 P(a)(c_2^+ + c_2^-)}{(k_2 - d)(P(a) + R(a))c_2^+}\right)}{\frac{R(a)}{d} - \frac{P(a)}{k_2 - d}} + \frac{c_2^+ d}{P(a) + R(a)} \quad (A2.4)$$

If we now introduce the following notations:

$$\sigma_2 = \frac{r_2}{r_2 + p_2}, \quad \beta_2 = \frac{(c_2^+ + c_2^-)k_2}{c_2^+(-k_2 + d)}, \quad \delta_2 = \frac{r_2 k_2}{(r_2 + p_2)d}, \quad v_2 = k_2 - d \quad (A2.5)$$

one has :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_2(a) &= -\frac{c_2^-(\sigma_2 a - 1)v_2 a \log((\sigma_2 a - 1)\beta_2)}{((-p_2 + r_1)a - r_1)(1 - \delta_2 a)} + \frac{c_2^+ d(\sigma_2 a - 1)a}{(-p_2 + r_1)a - r_1} \\ J_2'(a) &= dJ_2(a)/da, \quad J_2''(a) = dJ_2'(a)/da \\ \frac{d\tilde{J}_2(a)}{da} &= \tilde{J}_2'(a_1) + \tilde{J}_2''(a_1)(a - a_1) + O(a - a_1) \end{aligned} \quad (A2.6)$$

Suboptimal initial condition

Now, a suboptimal condition a_0^* could be obtained from:

$$\tilde{J}_1'(a_1) + \tilde{J}_1''(a_1)(a - a_1) + \tilde{J}_2'(a_1) + \tilde{J}_2''(a_1)(a - a_1) \approx 0 \quad (\text{A2.7})$$

or equivalently,

$$a_0^* = \frac{(\tilde{J}_1''(a_1) + \tilde{J}_2''(a_1))a_1 - (\tilde{J}_1'(a_1) + \tilde{J}_2'(a_1))}{\tilde{J}_1''(a_1) + \tilde{J}_2''(a_1)} \quad (\text{A2.8})$$

Appendix 3

Demand Averaging Principle (DAP)

Consider the following single part production systems and their associated performance criteria under an *ergodic assumption*, and a hedging control policy with common critical level Z_1 :

$$S: \begin{cases} J_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T c_1 x_1(t) dt = c_1 \lim_{T \rightarrow +\infty} E(x_1(t)) \\ \dot{x}_1(t) = u_1(t) - d_1(t), \quad x_1(0) = x_0 \\ x_1(t) \geq 0 \\ 0 \leq u_1(t) \leq \alpha_1(t) k_1 \end{cases} ; \quad \tilde{S}: \begin{cases} \tilde{J}_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T c_1 \tilde{x}_1(t) dt = c_1 \lim_{T \rightarrow +\infty} E(\tilde{x}_1(t)) \\ \dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{u}_1(t) - d, \quad \tilde{x}_1(0) = x_0 \\ \tilde{x}_1(t) \geq 0 \\ 0 \leq \tilde{u}_1(t) \leq \alpha_1(t) k_1 \end{cases} \quad (\text{A.3.1})$$

Notice that system S is essentially the upstream subsystem for a two-machine flow shop under DHPC policies, whereas system \tilde{S} corresponds to a Hu type of machine. Notice also that $d_1(t)$ is a stochastic demand process with long term average d .

The essence of the *demand averaging principle* lies in the possibility of approximating the cost J_1 associated with S , with the cost \tilde{J}_1 associated with \tilde{S} . The goal of this appendix is twofold: first, we develop qualitative arguments explaining the role of the boundaries at zero and Z_1 in insuring that the two buffer processes remain very close in an average sense; this in turn insures that if a piecewise linear cost structure is adopted, the corresponding costs are close to each other. Secondly, we present a summary table of extensive numerical Monte-Carlo tests asserting the quality of the approximation.

We now present our qualitative arguments. We first note that away from boundaries 0 and Z_1 , whenever the buffer processes are in what we shall term as *synchrony*, their trajectories will coalesce during sojourn times of surplus processes x_2 on its hedging level Z_2 (at which point machine M_2 will consume d parts per unit time), and they will part whenever x_2 leaves hedging level Z_2 . *This is because, away from boundaries, systems S_1 and \tilde{S}_1 have exactly the same production rate.* During separation intervals (which correspond to first return times of process x_2 to hedging level Z_2), x_1 will dominate (see Fig. A.3.1), and the average excess of x_1 relative to \tilde{x}_1 can be precisely computed (see [32], Lemma 3).

Upon the return of x_2 to Z_2 , x_1 and \tilde{x}_1 merge again. If the situation persisted undisturbed, in the long run, x_1 would dominate \tilde{x}_1 on average. However, the boundary at zero destroys any synchrony that may have developed between x_1 and \tilde{x}_1 . Indeed the boundary at zero plays totally asymmetric roles for x_1 and \tilde{x}_1 . In the case of x_1 , it can be viewed as merely a *demand postponement mechanism*, but machine M_1 remains unproductive. Thus, the pent up demand will reemerge as soon as M_1 becomes

operational again. In the case of \tilde{x}_1 , a sojourn at the zero boundary can be viewed as *productive*, with the production rate of machine \tilde{M}_1 set at d . Thus assuming that x_1 and \tilde{x}_1 merge at zero, respectively spending times T_{off} and \tilde{T}_{off} on the zero boundary, when they both reemerge together from zero, machine \tilde{M}_1 would have a cumulative production lead of $d \tilde{T}_{off}$ relative to machine M_1 . Furthermore, process x_1 will reemerge more slowly from zero than x_1 , because it is subjected to a pent-up cumulative demand $d T_{off}$ above the normal demand. Thus, after a transient whereby \tilde{x}_1 dominates x_1 , the two processes will meet again at times t such that the cumulative demand of x_1 lag behind the cumulative demand of \tilde{x}_1 , $d t$, by an amount $d T_{off}$. Thus they can *never meet* at a point such that x_2 is on its hedging level Z_2 (because if x_2 starts from Z_2 at $t=0$, it can only come back on Z_2 at times such that the cumulative production=cumulative demand= $d t$). As a result, x_1 and \tilde{x}_1 will keep on meeting and parting away, with in general no clear winner (since starting from a $d T_{off}$ offset, cumulative demand $D_1(t)$ will oscillate *evenly* around the line $d t - d T_{off}$), except for a small transient if x_1 has also sojourned at zero. This transient will give a slight (and periodic) advantage to \tilde{x}_1 early on. The only way x_1 can ever catchup with the cumulative production of \tilde{x}_1 is if the two processes sojourn sufficiently long on Z_1 that x_2 can reach its hedging level. If this does not happen before one of the two leaves Z_1 , they will keep crossing each other with no clear winner. However if they stay long enough that x_2 reaches Z_2 , then when they depart, their trajectories are common, until x_2 leaves Z_2 again, in which case x_1 will dominate \tilde{x}_1 . This domination will persist until \tilde{x}_1 hits the zero level or until x_1 prematurely returns to the Z_1 level in which case M_1 loses some production relative to \tilde{M}_1 . Thus, summarizing, the zero boundary clearly favors \tilde{x}_1 over x_1 upon leaving, but not for long, whereas the Z_1 boundary will tend to favor x_1 upon leaving if synchrony has been achieved. Both boundaries will tend to limit dominance of one trajectory with respect to the other.

Furthermore, Z_1 acts dominantly as a *cohesiveness factor* between the instantaneous trajectories, while the zero boundary acts as a *dispersion factor*. This all makes for a high degree of solidarity between $x_1(t)$ and $\tilde{x}_1(t)$ and thus the corresponding costs.

Below, we present a typical Monte-Carlo trajectory of x_1 and \tilde{x}_1 parameters, showing the contribution of boundaries to the minimization of the gap between both processes x_1 and \tilde{x}_1 (see Fig. A.3.2), as well as a summary table of Monte-Carlo cost comparisons for a diverse range of demand rates as well as for *arbitrary hedging levels* Z_1 and Z_2 (see Table A.3.1). The numerical evidence reinforces the conclusion of the qualitative arguments that the demand averaging principle will in general be an excellent approximation.

In Table A.3.1, $P(Z_1)$ =probability of being at Z_1 (associated with x_1), $P(0)$ =probability of being at zero (associated with x_1), $\tilde{P}(Z_1)$ = probability of being at Z_1 (associated with \tilde{x}_1), $\tilde{P}(0)$ = probability of being at zero (associated with \tilde{x}_1), and the parameters used are: $k_1=2.5$, $k_2=2$, $r_1=0.3$, $r_2=0.6$, $p_1=p_2=0.1$, $c_1=2$, $c_2^+=2$, $c_2^-=20$.

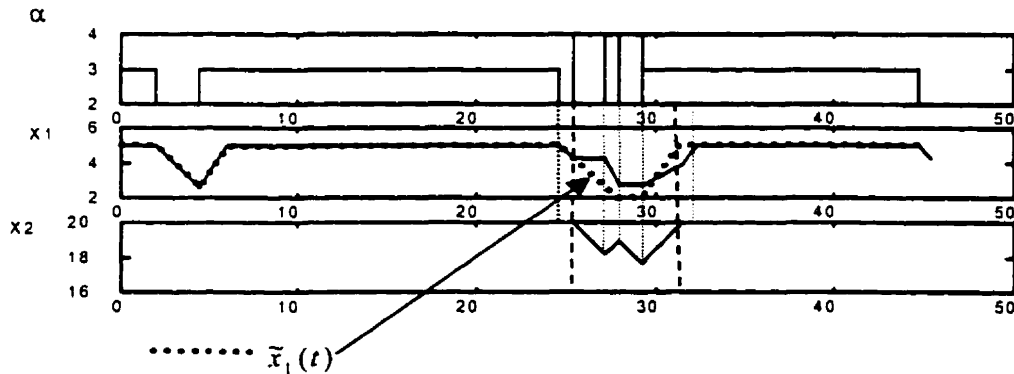


Fig. A.3.1: Domination of the $x_1(t)$ process over separation intervals corresponding to first return times of process $x_2(t)$ to hedging level Z_2

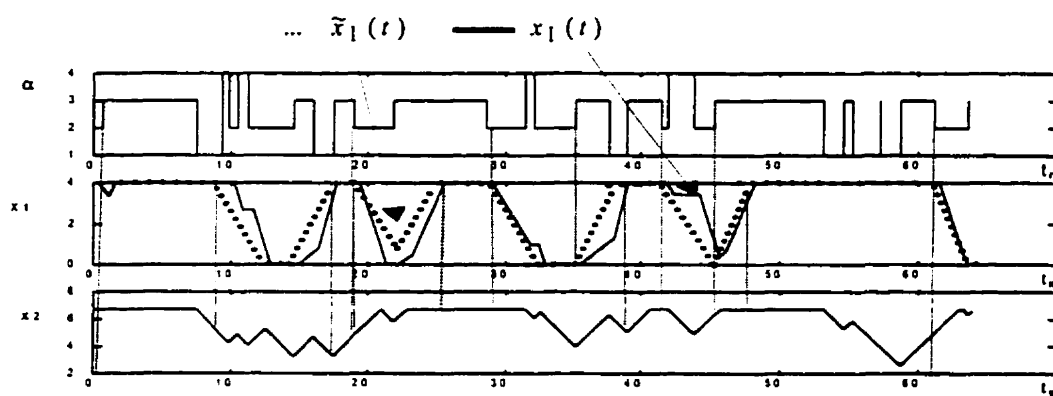


Figure A.3.2: A given realization of successive (alternating type) sequences

Table A.3.1: Summary of results for a diverse range of demand rates as well as for arbitrary hedging level Z_1 and Z_2

Z_1 and Z_2	d	$P(0)$	$\tilde{P}(0)$	$P(Z_1)$	$\tilde{P}(Z_1)$	J_1	\tilde{J}_1
$Z_1=5$ $Z_2=5$	1.2	0.0979	0.0837	0.5524	0.5965	7.33	7.79
	1.1	0.0861	0.0746	0.5759	0.6122	7.55	7.94
	1	0.0799	0.0651	0.5961	0.6267	7.72	8.00
	0.7	0.0405	0.0340	0.6607	0.6662	8.44	8.60
	0.5	0.0161	0.0147	0.6986	0.6912	8.94	8.98
	0.2	0.003	0.0002	0.7356	0.7283	9.62	9.63
$Z_1=50$ $Z_2=5$	1.2	0	0.00003	0.5230	0.5193	94.32	94.45
	1.1	0	0.000007	0.5566	0.5536	95.37	95.56
	1	0	0.000002	0.5929	0.5833	96.34	96.43
	0.7	0	0.0	0.6622	0.6528	98.13	98.14
	0.5	0	0	0.6937	0.6875	98.84	98.86
	0.2	0	0	0.7363	0.7283	99.61	99.63
$Z_1=0.5$ $Z_2=5$	1.2	0.2182	0.2211	0.7048	0.7233	0.74	0.74
	1.1	0.2155	0.2186	0.7048	0.7254	0.74	0.75
	1	0.2101	0.2157	0.7094	0.7271	0.75	0.76
	0.7	0.2011	0.2023	0.7128	0.7314	0.75	0.76
	0.5	0.1846	0.1858	0.7198	0.7340	0.77	0.77
	0.2	0.1174	0.1188	0.7446	0.7386	0.82	0.82

References

- [1] Olsder, G. J. and Suri, R. (1980). The Optimal control of Parts routing in a manufacturing system with failure-prone Machines. *Proceeding of the 19th IEEE Conference on Decision and Control*, 722-727.
- [2] Kimemia, J. and Gershwin S. B. (1983). An algorithm for the computer control of a flexible manufacturing system. *IIE Trans.*, **15** (4), 353-362.
- [3] Panwalkar, S. S. and Iskander, W. (1977). A survey of scheduling rules. *Operations Research*, Vol. 25, N° 1, 45- 61.
- [4] Graves, S. C. (1981). A review of production scheduling. *Operations Research*, **29** (4), 646-675.
- [5] Dupont-Gathermand C. (1984). A survey of flexible manufacturing systems. *Journal of Manufacturing System*, **1** (1).
- [6] Gershwin, S. B. , Hildebrant, R. R., Suri, R. and Mitter S. K. (1986). A control perspective on recent trends in manufacturing systems. *IEEE Contr. Syst. Magazine*, 3-15.
- [7] Buzacott, J. A and Shanthikumar, J. G. (1986). Models for understanding flexible manufacturing systems. *AIIE Trans.* **12**, 890-905.
- [8] Maimon, O. Z. and Gershwin, S. B. (1988). Dynamic scheduling and routing for flexible manufacturing systems that have unreliable machines. *Operations Research*,

36 (2), 279-291.

- [9] Rodammer, F. A. and White, P. (1988). A recent survey of production scheduling. *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybernet.*, **18** (6), 841-85.
- [10] Reisman, A., Kumar, A., Motwani, J. and Cheng, C. H. (1997). Cellular manufacturing : A statistical review of the litterature (1965-1995). *Operations Research*, **45** (4), 508- 519.
- [11] Conway, R., Maxwell, W., McClain, J. O. and Thomas, L. J. (1988). The role of work-in-process inventory in serial production Lines. *Operat. Res.*, **36** (2), 229-241.
- [12] Akella, R. and Kumar P. R. (1986). Optimal control of production rate in a failure Prone manufacturing system. *IEEE Trans. Automatic Control*, **31**, 116 126.
- [13] Bielecki, T. and Kumar, P. R. (1988). Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems. *Operations Research*, **36** (4), 532-541.
- [14] Hu, J. Q., Vakili, P. and Yu, G. X. (1994). Optimality of hedging point policies in the production control of failure prone manufacturing systems. *IEEE Transactions Automatic Control.*, **39** (9), 1875-1879.
- [15] Akella, R., Choong, Y. F. and Gershwin, S. B. (1984). Performance of hierarchical scheduling policy. *IEEE Transactions on Components, Hybrids and Manufacturing Technology*, **CHMT-7** (3), 225-240.
- [16] Gershwin, S. B., Akella, R. and Choong Y. F. (1985). Short term production

scheduling of an automated manufacturing facility. *IBM Journal Res., Develop.*, **29** (4), 392-400.

[17] Gershwin, S. B. (1994). *Manufacturing Systems Engineering*. Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall, 265-354.

[18] Hu, J. Q. and Xiang D. (1993). The queuing equivalence to a manufacturing system with failures". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **38** (3), 499-502.

[19] Hu, J. Q. and Xiang, D. (1995). Monotonicity of optimal flow control for failure-prone production systems, *Journal of Optimization Theory and Application*, **86** (1), 57- 71.

[20] Krichagina, E. V., Lou , S. X. and Taksar, M. I. (1995). Diffusion approximation for a controlled stochastic manufacturing system with average cost minimization. *Mathematics of Operations Research*, **20** (4), 895-920.

[21] Glasserman, P. (1995). Hedging-point production control with multiple failure modes. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **40** (4), 707-712.

[22] Algoet, P. (1989). Flow balance equation for steady state distribution of a flexible manufacturing System. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **34** (8), 917-921.

[23] Sharifnia, A. (1988). Production control of a manufacturing system with multiple machine states. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **33**, 620-625.

- [24] Malhamé, R. P. and Boukas, E. K. (1991-a). A Markov renewal analysis of the production control of a flexible manufacturing system under hedging point policies. *Technical Report*, Gerad G89-37, 1-27, Montreal, Canada.
- [25] Malhamé, R. P. and Boukas, E. K. (1991-b). A renewal theoretic analysis of a class of manufacturing system. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **36** (5), 580-587.
- [26] Malhamé, R. P. (1991). Criteria for the ergodicity of hedging point control policies in single part manufacturing systems. *Technical Report*, Gerad, G-91-29, 1-19, Montreal, Canada.
- [27] Malhamé, R. P. (1993). Ergodicity of hedging point policies in single-part multiplestate manufacturing systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **38** (2), 340-343.
- [28] Boukas, E. K. and Haurie, A. (1990). Manufacturing flow control and preventive maintenance: A stochastic control approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **35** (9), 1024-1031.
- [29] Boukas, E. K. (1995). Numerical methods for HJB equations of optimization problems for piecewise deterministic system. *Optimal Control Applications & Methods*, **16**, 4-18.
- [30] Boukas, E. K. and Yan, H., (1996). Optimal control of manufacturing flow and preventive maintenance. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **41** (6), 881-885.
- [31] Kenne, J.P., Gharbi, A. and Boukas E. K. (1997). Control policy simulation based on machine age in a failure prone one-machine, one-product manufacturing

system. *International Journal of Production Research*, **35** (5), 1431-1445.

[32] El-Férik, S., Malhamé R., P. and Boukas E.K. (1998). A tractable class of maximal hedging policies in multi-part manufacturing systems. *Discrete-Event Dynamic Systems: Theory and Application*, **8**, 299-331

[33] Perkins, J. R. and Srikant, R. (1995). Hedging policies for failure-prone manufacturing systems: Optimality of JIT and bounds on buffer levels. *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, 3144-3149.

[34] Perkins, J. R. and Srikant, R (1997). Scheduling multiple part-types in an unreliable single machine manufacturing system. *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, **42**(3), 364-377.

[35] Lehoczky, J. . Sethi, S. P., Soner, H. M. and Taksar, M. I. (1991). An asymptotic analysis of hierarchical control of manufacturing systems under uncertainty. *Mathematics Of Operations Research*, **16** (3), 597-608.

[36] Caramanis, M. and Liberopoulos (1992). Perturbation analysis for the design of flexible manufacturing systems flow controllers. *Operat. Res.*, **40** (6), 1107-1125.

[37] Liberopoulos. G. and Caramanis, M. (1994). Infinitesimal perturbation analysis for second derivative estimation and design of manufacturing controllers. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **81** (2)., 297-327.

[38] Posner, M. J. M., Berg, M. and Zhao, H. (1989). Analysis of a production-inventory system with unreliable production facility. *Operat. Res. Letters*, **8**, 339-345.

- [39] Berg, M., Posner, M. J. M. and Zhao, H. (1994). Production-inventory systems with unreliable machines. *Operations Research*, vol. 42, N° 1.
- [40] Srinivasan, M. M and Lee H. (1996). Production-inventory systems with preventive maintenance. *IIE trans.*, **28**, 879-890
- [41] Sethi, S. P. and Zhang, Q. (1994). Hierarchical decision making in stochastic manufacturing system. Birkhauser, 1994.
- [42] Ryzin, V. G., Lou, S. X. C. and Gershwin, S. B. (1993). Production control for a tandem two-machine system. *IIE Trans.*, **5**, 5-20.
- [43] Veatch M. H., Wein L. M. (1994). Optimal control of a two-station tandem production /Inventory system. *Operations Research*, 337-350.
- [44] Fong, N. T. and Zhou, X. Y. (1996). Hierarchical production policies in stochastic two-machine flow shop with finite buffers. *Journal of Optimization theory and Applications*, **89** (3), 681-712.
- [45] Presman, E., Sethi S., and Zhang, Q. (1995). Optimal feedback production in a stochastic N-Machine Flow Shop. *Automatica*, **31** (9), 1325-1332.
- [46] Samaratunga, C., Sethi, S. P. and Zhou, X. Y. (1997). Computational evaluation of hierarchical production control policies for stochastic manufacturing systems, *Operations Research*, **45** (2), 258-274.
- [47] Colonius, F. (1989). Asymptotic behavior of optimal control systems with low

discounted rates. *Mathematics of Operations Research*, **14** (2), 309-316.

[48] Wirth, F. (1993). Convergence of the value function of discounted infinite horizon optimal control problems with low discounted rates. *Mathematics of Operations Research*, **18** (4), 1006-1019.

[49] Lou, S. X. C. and Kager, P. W. (1989). A robust production control policy for VLSI wafer fabrication. *IEEE Trans. Semicond. Manufact.*, **2** (4), 159-164.

[50] Yan, H., Yin, G., and Lou, S. X. C. (1994). Using stochastic optimization to determine threshold values for the control of unreliable manufacturing systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **83**, 511-539,

[51] Bai, S. X. and Gershwin, S. B. (1995). Scheduling manufacturing systems with work-in-process inventory control: Single-part-type systems. *IIE Trans.*, **27**, 599-617.

[52] Bai, S. X. and Gershwin, S. B. (1995). Scheduling manufacturing systems with work-in-process inventory control: multiple-part-type systems. *International Journal of Production Research*, **32** (2), 365- 385.

[53] Hu, J-Q. (1995-b). A decomposition approach to flow control in tandem production production systems. *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, LA, 3140-3143.

[54] El-Férik, S. and Malhamé, R. P. (1997). Padé approximants for the transient optimization of hedging control policies in manufacturing. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **42** (4), 440-457.

- [55] Hu, J-Q. (1995-a). Production control for failure-prone production systems with no backlog permitted. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **40** (2), 299-295.

- [56] Darren-Redfern (1996) Maple V: The Maple Handbook, Springer-Verlag.

- [57] Ross, S. M. (1993). Introduction to probability models, fifth edition. *Academic Press*, 303-347.

- [58] Griffiths, J. D. (1996). The coefficient of variation of queue size for heavy traffic. *Journal of the Operational Research Society*, **47** (8), 1072-1076

- [59] MATLAB (1996). The Language of Technical Computing: Using Matlab Version 5, *Mathworks*, 1-3 to 15-16

- [60] Liberopoulos G. and Hu J. (1995). On the ordering of optimal hedging points in a class of manufacturing flow control models. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **40**, 282-286.

- [61] Naylor, T. H., Balintfy, J. L., Burdick, D. S. and Chu, K. (1966). *Computer Simulation Techniques*. John Wiley and Sons, New York, 43-121.

- [62] Mascolo M. D., Frein Y. and Dallery Y. (1996). An analytical Method for Performance Evaluation of Kanban Controlled Production Systems. *Operation Research*, vo. 44, No. 1, 50-64.

- [63] Bonvik A. M. (1996) Performance Analysis of Manufacturing Systems under Hybrid Control Policies. *Ph.D. Thesis, Electrical Engineering and Computer science, MIT*.

ANNEXE II

Decentralized Hedging Production Control for M Tandem machines in Stochastic Manufacturing Systems^(*)

Jean MBIHI⁽¹⁾ and Roland P. MALHAMÉ⁽²⁾

École Polytechnique, Génie Électrique et Génie Informatique, Automatisation et Systèmes

C.P. 6079, Succ. Centre Ville, H3C 3A7, Montréal, Québec, Canada

⁽¹⁾ E-mail: mbihi@auto.polymtl.ca

⁽²⁾ E-mail: malhame@auto.polymtl.ca

Abstract

Production optimization is considered for unreliable single-part M machine flow shops over the class of so-called *decentralized hedging control policies* (the counterpart of kanban policies in fluid manufacturing models). A decomposition optimization methodology previously developed for the case $M=2$ is generalized to the case $M>2$. The decomposition is founded on two decoupling concepts: a *machines decoupling approximation* (whereby starvation phenomena are viewed only as a statistical machine reliability decreasing factor, while ignoring any correlation between the instants of starvation and the states of successive machines in the flow line), and a so-called *demand averaging principle* (which states that the cost of maintaining a given critical buffer level depends only on the long term average of the downstream demand process, provided conditions remain unchanged upstream of that buffer). Using these two decoupling principles, we show how for a given choice of the $M-1$ arbitrary buffer critical levels, the overall cost associated with the control policy can be analytically obtained by adding the costs of M independent, fictitious, Markovianized individual

^(*) Soumis à: *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, reçu le 06/02/99

machines falling into three categories: reliable supply- no backlog permitted, unreliable supply – no backlog permitted, and unreliable supply – backlog permitted types.

Subsequently, the search for the best policy within the reduced class of control policies of interest is organized into a hierarchical optimization scheme. Because of its strong reliance on analytical results, as well as the decoupled nature of the calculations and a quasi-optimal initialization scheme, the search converges very quickly. Results are reported for a wide class of operating parameters, and calculated costs are compared to Monte Carlo based estimates.

Key words: M-machine flow shops, decentralized hedging production policies, first return times, Markovianization.

1. Introduction

Most manufacturing systems can be qualified as complex. They involve multiple machines, a number of buffers, many processing steps of raw material, several unreliable resources, numerous random events as well as maintenance and rework activities. In the current literature (see Gershwin [18], Gershwin, Akella and Choong [19], Sethi and Zhang [33], Sethi and Zhou [36]), Sethi, Yan, Zhang and Zhou [35], a manufacturing system consisting of $M \geq 2$ machines in tandem and containing internal buffers (one for each machine) is called an M-machine flow shop. Practically, flow shops are frequently encountered in semiconductor factories (see Gershwin, Akella and Choong [19]), in VLSI wafer fabrication facilities (see Lou and Kager [25]), in automobile assembly lines (see Bonvik, Couch and Gershwin [9], Wittrock [41]), as well as in other typical examples reported in Ref. [12] and [14].

A problem of current interest in manufacturing systems engineering is how to obtain rates of production of intermediate and finished products in manufacturing flow shops, in order to minimize the total production cost including inventories and backlogs costs. In the line of manufacturing systems research based on *optimal feedback control theory* as initiated by Kimemia and Gershwin [24], Akella and Kumar [1], Bielecki and Kumar [8], and Hu, Valiki and Yu [23] have proved explicitly the optimality of constant level *hedging production* policies in the case of a Markovian two-state machine (producing one part-type, and for specific classes of cost structure). Nevertheless, the optimality of hedging production policies has not been proven in the case of more complex manufacturing system structures, and obtaining exact optimal policies, if they exist, even through numerical means, appears to be a formidable task. Although constant level hedging production policies are not optimal in general, significant theoretical works have been reported regarding hedging production controls for single part, Markovian or non Markovian multi-mode machines, or equivalently a number of two-state parallel machines (e.g., in Algoet [2], Sharifnia [37], Malhamé [26], Glasserman [20], Malhamé and Boukas [27], El-Férik and Malhamé [15]). Despite the insights emerging from the analysis associated with single part, multi-mode machine problems under hedging production policies, little attention has been devoted to the extension of such insights to manufacturing flow shops.

For failure prone flow shops involving unreliable machines/buffers in tandem, the dynamic programming formulation of the optimal production problem leads to complex Hamilton-Jacobi-Bellman equations involving constraints on the system states (see Van Ryzin and Gershwin [40], Sethi and Zhang [33], Sethi, Zhang and Zhou [34], Bayer and Sethi [6], Beyer, Sethi and Taksar [7], Song, Sun and Xing [38], and Tsitsiklis [39]). Although a number of verification theorems have been developed by Presman, Sethi and Zhang [31], it appears that explicit optimal solutions are hard, if not impossible to obtain. Because of this difficulty, a few approximate or hierarchical methods have been proposed in the literature and the idea behind these methods as postulated earlier by the

Operations Research Committee (see CONVOR [13]), is to convert an original complex optimization problem into one or more solvable approximate problems. For example, a *two-boundary* control methodology has been investigated by Lou and Kager [25], Van Ryzin, Lou and Gershwin [40] in the case of a single part-type, two-machine flow shop. Efficient heuristic algorithms have been proposed by Bai and Gershwin [4, 5] for a three-level hierarchical regulation of the production flow in single part-type/multi-machine flowshops, and in multi-part-type, multi-machine flow shops respectively. Gershwin [17] has also suggested the so-called generalized hedging production policy as a good heuristic methodology for “surplus” control in unreliable manufacturing flow shops. Hierarchical optimization schemes based on singular perturbation theory appear (for single-part-type, two-machine flow shops) in, e.g., Sethi and Zhang [33], Fong and Zhou [16], Samaratunga, Lou, Sethi and Zhang [32], Sethi and Zhou [36]. Following the same line of research, some insights have been given by Presman, Sethi and Zhang [31] in the case of single part-type, multi-machine flow shops, whereas Sethi and Zhou [36] have been interested in the analysis of near optimal controls in multi-part-type job shops. In contrast to singular perturbation techniques based works, where the emphasis is not on reducing the dimensionality of the original optimization problem, Hu’s approach [22] to the problem is based on the decomposition of single part-type, two-machine flow shops into two *independent* machines, followed by the optimization of marginal costs, along with the computation of a so-called *starvation cost*. The results reported by Hu [22] lead to a control law whereby each machine is assigned a hedging level but where the upstream hedging level depends on the instantaneous downstream inventory level, and thus the control law is not strictly decentralized. Similarly, the heuristic control laws developed by Bai and Gershwin [4, 5] as well as the so-called *generalized hedging point policy* as conjectured by Gershwin [17] are not strictly decentralized control strategies because the production rate at one machine depends on the computation of a surplus level which is a function of surplus levels at all machines which are after it down the production line.

From the aforementioned literature, it appears that even for the proposed approximate or reduced version of the flow shop production optimization problem, it remains computationally difficult to carry out a complete characterization of control laws. In addition, the level of complexity grows exponentially with the number of machines in tandem. Because of these difficulties, the emphasis in this work is on *decentralized hedging production policies*. Such a class of policies is close in spirit to the kanban philosophy of operation (see Di Mascolo, Frein and Dallery, [28]). It is based on viewing each machine as an isolated production unit associated with an unreliable supply of parts, and subjected to a stochastic demand.

Decentralized hedging production policies (DHP) for manufacturing flow shops associate to each machine (or production cell) a constant inventory or work-in-process hedging level to be maintained whenever possible. This class of controls has been first considered by Yan, Yin and Lou [42] in the case of a two-machine flow shop under fluid model. They solved the production optimization problem for a single part-type, two-machine flow shop under DHP policies using *infinitesimal perturbation techniques*. Nevertheless, while intellectually quite rich, such techniques do not capitalize on known results for single part multi-mode machine optimization, and their extension to general manufacturing systems involving $M > 2$ machines organized in tandem, appears to be computationally quite hard. By contrast, Mbihi and Malhamé [29-30] have recently proposed a *decomposition approach* ultimately relying on most available analytical results for single part-type, multi-state machines. Their decomposition approach has led to a complete and very fast characterization of a suboptimal hedging production policy in a single-part-type, two-machine flow shop. The aim of this paper is to demonstrate that the *decentralized decomposition approach* proposed in Mbihi and Malhamé [29, 30] for the optimization of single part, two-machine flow shops can actually be extended to M-machine flow shops without an explosion in the computational complexity of the resulting algorithm.

In our approximate decomposition methodology, we resort to $M-1$ so-called *availability coefficients* of work-in-process (*WIP*) to characterize the connection between each *single equivalent machine* and its nearest upstream and downstream neighbors. In addition, the *demand averaging principle* (DAP) investigated in the case of a two-machine flow shop by Mbihi and Malhamé [29, 30] plays a central role in our analysis. These developments give rise to the analytical expression of the overall production cost for any particular choice of $M-1$ critical buffer levels, or equivalently for any particular choice of $M-1$ *availability coefficients of WIP*. As soon as the overall production cost is derived as a multi-parameter scalar function, a suboptimal production policy (if any) can be easily obtained by minimizing that overall production cost over the parameter space. The remainder of the paper is organized as follows: in Section 2, the M -machine flow shop of interest is described, along with the so-called class of DHP policies. In Section 3, the foundations of our decomposition methodology are discussed in detail. Section 4 is devoted to the analytical computation of production costs associated with Markovianized *single equivalent machines*, and our developments are organized into an easy to use optimization scheme in Section 5. Finally, the proposed optimization scheme is tested on a diverse set of numerical sample manufacturing flow shops in Section 6, while concluding remarks are presented in Section 7.

2. Single-part-type M -machine flow shops and decentralized hedging Production controls

This section provides details regarding the class of single-part-type, M -machine flow shops, as well as the suboptimal class of control laws under consideration.

2.1 Single-part-type, M -machine flow shops

The single-part-type, M -machine manufacturing flow shop of interest depicted in Fig.1 consists of M tandem machines, denoted M_1, M_2, \dots, M_M respectively. Each

machine is a reduced and aggregated representation of a manufacturing workstation. Practically, such a workstation may involve a numerical control machine, an automated robot, a conveyor, a programmable logic controller, and an industrial computer network. The unreliable character of production cells is assumed to be captured by exponentially distributed periods of operation and repair with respective rates of $1/p_m$ and $1/r_m$, for $m=1, \dots, M$. Thus, individual machine i behaves as two-state Markov chain $\xi_i(t)$, and the joint behavior of machines is characterized by a state vector $\xi_i(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_M(t))^T$ which can take up to 2^M distinct configurations. The global Markov chain is associated with a $2^M \times 2^M$ intensity matrix denoted $Q=[q_{\alpha\beta}]$. The production rate of machine M_m is denoted $u_m(t)$ and its capacity (maximum production rate) is k_m with $k_m \geq k_{m+1}$ for $m=1, 2, \dots, M-1$. Following Fig. 1, parts travel throughout the system in a fixed sequence: machine 1/buffer 1, machine 2/buffer 2, ..., machine M /buffer M . It is assumed also that the first machine M_1 is never starved and the last machine M_m is never blocked. The buffer level $x_m(t)$ associated with machine M_m cannot be negative ($x_m(t) \geq 0$) except for the last buffer level $x_M(t)$ related to finished products, where backlogs are assumed to be permitted. We formulate a stochastic optimal control problem based on the set-up of Sethi and Zhang [34], Presman, Sethi

$m=2, 3, \dots, M-1$

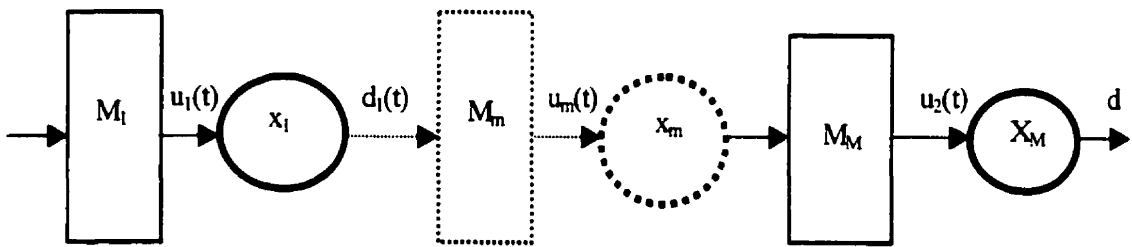


Fig. 1: One-part-type, M -machine flow shop

and Zhang [31], Bai and Gershwin [4,5], except that instead of a *discounted cost* functional, an *average cost criterion* is considered. The average cost criterion is known in general to be more difficult to analyze (see Arapostathis et al. [3]). More specifically, the problem is to find an *admissible production feedback control policy* $u_f \in \Omega_{ad}$ which

minimizes (for any choice of initial $(x(0), \xi(0))$) the overall average production cost of the tandem M-machine system, i.e.:

$$J(x(0), \xi(0)) = J^* = \inf_{u_f \in \Omega_{ad}} \left[\lim_{T \rightarrow +\infty} E \left(\frac{1}{T} \left(\int_0^T \left(\sum_{m=1}^{M-1} c_m x_m(t) \right) + c_M^+ x_M^+(t) + c_M^- x_M^-(t) \right) dt / x(0), \xi(0) \right) \right] \quad (1)$$

where $E(. / x_0, \xi_0)$ is the conditional expectation operator, $x_M^+(t) = \text{Max}(0, x_M(t))$ and $x_M^- = \text{max}(0, -x_M(t))$. In addition, $c_m (m=1, \dots, M-1)$, c_M^+ and c_M^- are given non negative constants. Constraints associated with the preceding optimization control problem include the *fluid* model of the production flow, the bounds on $x_m(t)$ ($m=1, 2, \dots, M-1$) and the bounds on the production rate $u_m(t)$ ($m=1, 2, \dots, M$). These constraints are written down as follows:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ -1 \end{pmatrix} d = A u(t) + B d \\ x_m(t) \geq 0 \quad \text{for } m = 1, 2, \dots, M-1 \\ 0 \leq u_m(t) \leq \xi_m(t) k_m \quad \text{for } m = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (2)$$

Note that in (2) we have assumed that the demand rate for parts d is constant. The *Hamilton-Jacobi-Belmann* (HJB) equations resulting from the preceding production optimization program can be obtained as in Gershwin [18], Caramanis and Liberopoulos [10]:

$$J^* = \min_{u_f \in \Omega_{ad}} \left(g(x(t)) + \frac{\partial V(x, \alpha)}{\partial x} f(u(t)) + \sum_{\beta=1}^{2^M} q_{\alpha\beta} V(x(t), \beta) \right) \quad (3)$$

with:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{ad} = \text{set of admissible feedback control} \\ f(u(t)) = A u(t) + B d \\ g(x(t)) = \sum_{m=1}^{M-1} c_m x_m(t) + c_M^+ x_M^+(t) + c_M^- x_M^-(t) \\ V(x, \alpha) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\min_{u(t) \in \Omega_a} \left[E \left(\int_0^T g(x(t)) dt - TJ^* \right) \right] \right) \\ x_m(t) \geq 0, \text{ for } m = 1, 2, \dots, M-1 \end{array} \right. \quad (4)$$

Since $g(x)$ is independent of $u(t)$ whereas $f(u(t))$ is linear, then HJB equations (4) indicate that the optimal solution (if any) falls into the class of bang-bang control policies. Unfortunately, the above HJB equations are indeed hybrid and altogether multidimensional with state constraints. Thus, an exact characterization of the associated optimal solution is hard, if not impossible. Unlike most available works cited in the introduction of this paper, our aim is neither to construct, nor to solve any approximate versions of the HJB equations. Rather, our objective is to develop a direct decomposition approach and solve a *parameter optimization* problem within a suboptimal class of DHP controls.

2.2 A class of DHP policies

DHP policies considered here and elsewhere are outlined in definition 1 provided below.

Definition 1: *DHP policies for M-machine flow shops are a class of kanban-like production policies, the production control law of which is defined as follows:*

- *For the head of the line machine M_1 :*

$$u_1 = \begin{cases} u_2(t) & \text{if } x_1(t) = Z_1, \xi_1 = 1 \\ k_1 & \text{if } Z_{01} = 0 \leq x_1(t) < Z_1, \xi_1 = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

- For an intermediate machine M_m ($m=2, \dots, M-1$) :

$$u_m = \begin{cases} u_{m+1} & \text{if } \begin{cases} x_m(t) = Z_m, \xi_m = 1, x_{m-1}(t) > 0 \\ \text{OR} \begin{cases} x_m(t) = Z_m, \xi_m = 1 \\ \exists k (1 \leq k < m-1) \begin{cases} \xi_{m-1} = 1, \dots, \xi_{m-k} = 1 \\ x_{m-1} = x_{m-2} = \dots = x_{m-k} = 0, x_{m-k-1} > 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ k_m & \text{if } \begin{cases} 0 \leq x_m(t) < Z_m, \xi_m = 1, x_{m-1}(t) > 0, \\ \text{OR} \begin{cases} 0 \leq x_m(t) < Z_m, \xi_m = 1 \\ \exists k (1 \leq k < m-1), \begin{cases} \xi_{m-1} = 1, \dots, \xi_{m-k} = 1 \\ x_{m-1} = x_{m-2} = \dots = x_{m-k} = 0, x_{m-k-1} > 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

- For the front-end machine M_M :

$$u_M = \begin{cases} d & \text{if } \begin{cases} x_M(t) = Z_M, \xi_M = 1, x_{M-1}(t) > 0 \\ \text{OR} \begin{cases} x_M(t) = Z_M, \xi_M = 1 \\ \exists k (1 \leq k < M-1) \begin{cases} \xi_{M-1} = 1, \dots, \xi_{M-k} = 1 \\ x_{M-1} = x_{M-2} = \dots = x_{M-k} = 0, x_{M-k-1} > 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ k_M & \text{if } \begin{cases} 0 \leq x_M(t) < Z_M, \xi_M = 1, x_{M-1}(t) > 0, \\ \text{OR} \begin{cases} 0 \leq x_M(t) < Z_M, \xi_M = 1 \\ \exists k (1 \leq k < M-1), \begin{cases} \xi_{M-1} = 1, \dots, \xi_{M-k} = 1 \\ x_{M-1} = x_{M-2} = \dots = x_{M-k} = 0, x_{M-k-1} > 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

Where Z_m ($m=1, 2, \dots, M$) are constants hedging levels to be determined for the associated parameterized production optimization problem defined by (1) given (2), (5), (6) and (7).

Justifications for restricting our analysis to DHP policies are threefold:

- They retain the intuitive notion of *critical surplus* as a *hedge* against uncertainty due to machine failures, starvation phenomena, as well as fluctuation in demand.
- They are structurally simple and easy to implement because of their decentralized nature. In fact, as long as a workstation is not starved, only local

information is needed to specify its production law. This is the idea of a *decentralized control policy*, which is close in spirit to the kanban philosophy of operation (see Bonvik, Couch and Gershwin [9]).

- They constitute a reasonable approximation of the two-boundary policies proposed by Lou and Kager [25], a simplified class of suboptimal control policies with good performance when compared with dynamic programming based optimal control laws.

While singular perturbation analysis techniques (see Sethi and Zhang [33], Samaratunga, Lou, Sethi and Zhou [32]), as well as other optimization schemes cited in the introduction (see Beyer and Sethi [6], Song, Sun and Xing [38], Yan, Yin [42]), which might all involve a computational explosion when the number of machines in tandem grows, by contrast, the decomposition principles presented in the next section for single-part-type, M-machine flow shops under DHP policies, rely on the reduction of an intractable production optimization problem, to a collection of production optimization subproblems with known closed form or quasi-analytical solutions.

3. Foundations of the proposed decomposition methodology

Our decomposition methodology for the analysis of the production optimization problem in single-part-type, M-machine flow shops under DHP policies, relies on the generalization of a number of basic concepts developed by Mbihi and Malhamé in [29, 30], including two approximate decoupling principles (the *machines decoupling approximation*, and the so-called *demand averaging principle*), the concept of *availability coefficients* of WIP, and a *Markovianization scheme* for decoupled semi-Markovian machines which in its most general form builds on the first passage-time theory of piecewise constant velocity Markov processes.

3.1 Machine decoupling approximation (MDA)

Structurally speaking, we conjecture that the original M -machine tandem system depicted on Fig. 1 consists of three categories of independent isolated machines as shown in Fig. 2. This includes, a head of the line machine M_1 , an intermediate machine M_m ($m=2, 3, \dots, M-1$) and a front-end machine M_M . Starvation phenomena are viewed as a statistical machine reliability reducing phenomenon to be reckoned with, but any correlation between the instants of starvation and the states of successive machines in the flow line is simply ignored.

3.1.1 Equivalent model of the *head of the line* machine M_1

The equivalent model of the head of the line machine M_1 as shown in Fig. 2.1 is a *single isolated two-state machine*, with both a *perfectly reliable supply* and a *stochastic demand* $d_1(t)$. In addition, since $x_1(t)$ must be non negative, backlog is not permitted.

3.1.2 Equivalent model of an *intermediate machine* M_m ($m=2, \dots, M-1$)

The equivalent model of any intermediate machine as depicted on Fig. 2-2 is a *single isolated two-mode machine*, with both an *unreliable supply* and a *stochastic demand* $d_m(t)$. Also, backlog is not allowed in this case. Notice that the randomness of supply x_{m-1} for machine M_m ($m=2, \dots, M-1$) is captured by means of a binary random availability variable $I_{x_{m-1}}$, defined as the characteristic function of the set $x_{m-1} > 0$.

3.1.2 Equivalent model of the *front-end* machine M_M

The equivalent model associated with the last machine M_M is presented in Fig. 2-3. It is similar to the model of an intermediate *machine*, except that backlogs of finished parts are permitted and the associated demand rate for finished parts is a constant d .

Given the MDA presented above, the original M-machine system could be thought of as a collection of M single isolated failure prone independent machines. At this stage, we emphasize that in view of the so-called *demand averaging principle* discussed next, the further approximate analysis of resulting single machines will be greatly facilitated.

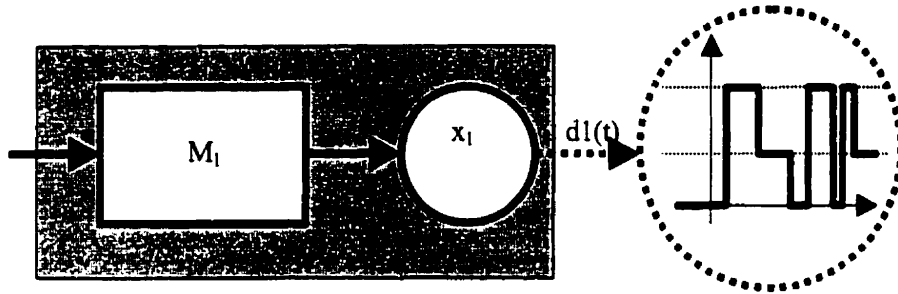


Fig. 2-1: Equivalent model of the head of the line machine M_1

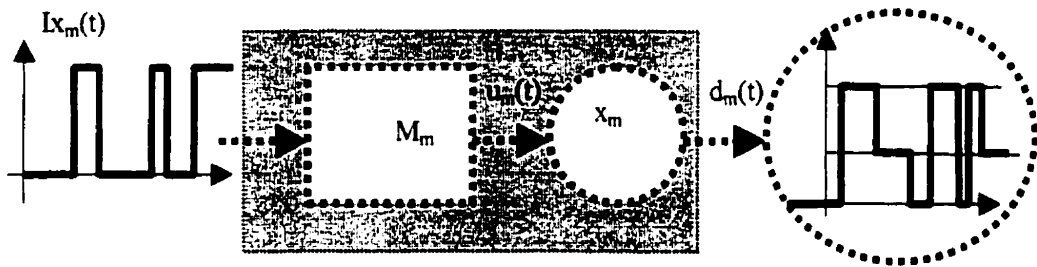


Fig. 2-2: Equivalent model of an intermediate machine M_m ($m=2, 3, \dots, M$)

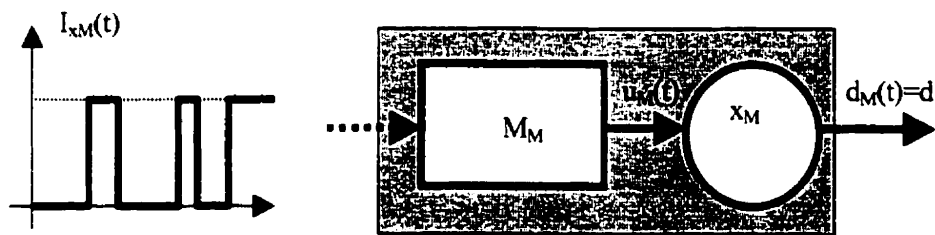


Fig. 2-3: Equivalent model of the front-end machine M_M

Fig. 2: Equivalent models of three types of single independent Semi-Markovian machines under MDA and DHP

3.2 Demand averaging principle (DAP)

The DAP states that for a piecewise linear structure of the cost functional as in (1), under system ergodicity assumption, the *infinite horizon average cost of maintaining a given critical buffer level depends only on the long term average of the downstream demand process, provided conditions remain unchanged upstream of that buffer*. As evidenced by numerous Monte Carlo simulations results reported here (see Table 2), but more extensively in [30], this is a very high quality approximation. Qualitative arguments as to why it works so well are presented in Appendix 3 of [30]. Thus, in the case of a constant demand rate for finished parts, since under the demand feasibility assumption, the long term average of the demand process at each stage of the flow line must all be equal to d , DAP will amount to a *transparency principle* (transparency of all machines down the line relative to a given machine). Indeed, it states that although the demand process at buffer m , $m < M$, is stochastic, from the cost point of view, everything happens as though machines M_i , $i > m$, were absent and machine M_m had to produce at demand rate d .

Despite the powerful consequences of DAP in mitigating the difficulties related to the stochastic demand rate processes in our equivalent machine models, the general treatment of single equivalent machines M_m ($m=2, 3, \dots, M$) remains a challenge due to the *unreliability of parts supply* feature. In order to overcome this second level of difficulty, it is useful to characterize the supply of each machine via a *supply availability process*.

3.3 A two-state Markovianization of the supply availability process

The stochasticity of supplies for machines M_m $m=2, 3, \dots, M$ is captured by means of the following Bernoulli variable $I_{x_{m-1}}(t)$ which we shall term a *supply availability process* (see Fig. 2-2 and Fig. 2-3).

$$Ix_{m-1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{m-1}(t) > 0 \\ 0 & \text{if } x_{m-1}(t) = 0 \end{cases} \quad m=2, \dots, M \quad (8)$$

Given (8) and following the basic ideas in [30], we define the *availability coefficients of WIP* as follows:

Definition 2: The availability coefficient a_{m-1} of a process $x_{m-1}(t)$ supplying machine M_m is the long term proportion of time for which $Ix_{m-1}(t)=1$ (or equivalently $x_{m-1}(t)>0$).

Now, following [30], we can define a supply availability coefficient for M_m by:

$$\begin{cases} a_{m-1} = \frac{\mu_{1,m-1}}{\mu_{1,m-1} + \frac{1}{\tilde{r}_{m-1}}} \\ m = 2, 3, \dots, M-1 \end{cases} \quad (9)$$

where $\mu_{1,m-1}$ is the expected first return-time (first moment of the first return random variable) of buffer level $x_{m-1}(t)$ to zero, and $\frac{1}{\tilde{r}_{m-1}}$ stands for the average length of stay in the corresponding buffer emptiness state. In [30], a_1 was in direct relation with the critical inventory level Z_1 to be optimized, and for convenience was chosen to be the design parameter. In this generalization to the $M>2$ case, we choose to keep the a_i 's, $i=1, 2, \dots, M-1$ as our set of design parameters. Now, a major difference between the $M=2$, and $M>2$ case is that while a_1 was sufficient to characterize the binary supply availability process of machine M_2 completely, because the off mode was essentially exponential (with mean sojourn time $1/r_1$), it is not so for a machine M_m , $m>2$. Indeed, it will, in general, take *two parameters* to characterize the simplest (*two-state*) Markovianization of supply availability processes. For machine m , $m>2$, we will choose

these parameters to be a_{m-1} and a_{m-2} . Now, under DAP, we shall be able to relate coefficient a_{m-1} to a_{m-2} , and \tilde{r}_{m-2} using steady-state probability density functions calculations on a Sharifnia (multi-mode) type of machine appropriately modified to *account for the no backlog situation* (see Section 3.4). This provides a relation between \tilde{r}_{m-2} and parameters a_{m-1} and a_{m-2} . Furthermore, steady-state probability calculations on the appropriate Markov chains indicate that for a *two-state Markovianization* (simplest approximation) of the supply availability process, the following proposition must hold:

Proposition 1: *Under MDA and DAP, the switching rates \tilde{r}_{m-1} , \tilde{p}_{m-1} (respectively away from and back to zero for the supply availability process of machine M_m) must satisfy:*

$$\begin{cases} \tilde{r}_{m-1} = \frac{r_{m-1} a_{m-2}}{r_{m-1} (1 - a_{m-2}) + p_{m-1}} \left(p_{m-1} + \frac{(1 - a_{m-2})}{a_{m-2}} \tilde{r}_{m-2} \right) & \text{for } m = 2, 3, \dots, M \\ \tilde{p}_{m-1} = \frac{1 - a_{m-1}}{a_{m-1}} \tilde{r}_{m-1} \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{with } a_0 = \tilde{r}_0 = 1 \quad (11)$$

Proof: see Appendix 1.

Equation (10), together with the remark that \tilde{r}_{m-2} can be related to a_{m-1} , and a_{m-2} , indicate that a two-state Markovianization of the M_m machine supply availability process can be parameterized by a_{m-1} , \tilde{r}_{m-1} , or equivalently by a_{m-1} , and a_{m-2} , for $m=1, 2, \dots, M$. Note however that while higher order Markovianizations are not considered in this paper, approximations can be made more *precise by taking into account higher order moments of the first return to buffer emptiness random variable*.

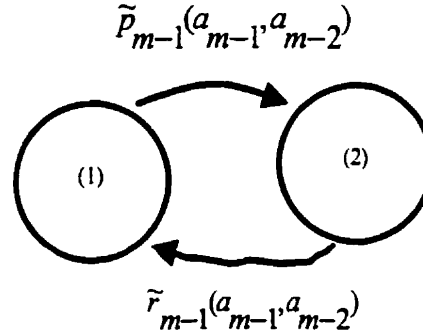


Fig. 3: *Approximate Markovian model of the supply process I_{xm-1}*

3.4 Construction of Markovianized isolated machine equivalents

It appears from Fig. 2 that each single machine involves at least either a stochastic demand process or an unreliable supply, or both phenomena. Unlike the head of the line machine M_1 which behaves exactly under MDA and DAP as a Markovian two-state *Hu type of machine* (with perfectly reliable supply, a constant demand and no backlog permitted), the remaining machines M_m ($m=2, 3, \dots, M$) are not *Markovian*. In order to make analysis possible, we resort to the *Markovianization scheme* shown in Fig. 4. It results from a Cartesian product of state spaces related to both the two-state *Markovianized version of the $I_{xm-1}(t)$ process* (see Fig. 3), and the marginal two-state Markov chain of machine M_m ($m=2, 3, \dots, M$); indeed, these two chains are treated as independent in accordance with the machine decoupling approximation. This leads to a four-state Markov process consisting of an operation state 1 in which $x_m(t) > 0$ and machine M_m is ON, a starvation state 2 in which M_m is ON and is constrained to remain idle since $x_1(t) = 0$, a failure state 3 in which the production capacity is zero since M_m is OFF, and a virtual starvation state 4. However, since a WIP level cannot become negative ($x_m \geq 0$ for $m=1, 2, \dots, M-1$) whereas backlogs of finished parts are permitted, the analysis of the Markovian machine in Fig. 4 requires proper modification of the existing theory (Sharifnia [37]).

4 Cost analysis for isolated single machines

We define or recall main notations needed further

- M : total number of machines.
- m : index of machine M_m ($m=1, 2, 3, \dots, M$)
- a_m : availability coefficient of work-in-process associated with $x_m(t)$
- Z_m : hedging level associated with $x_m(t)$
- $Z_{0m}=0$: virtual hedging level for $m=1, 2, \dots, M-1$
- $a_i^j = (a_i \ a_{i+1} \ \dots \ a_j)^T$ for all $j \geq i$ with $a_i^i = a_i$ if $i=j$.
- $a = a_1^{M-1} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{M-1})^T$
- $\lambda_{ij}^{(m)}$: transition rate of the intensity matrix from state i to state j in Markovian machine M_m
- $v_j^{(m)}$: velocity of $x_m(t)$ in mode j
- $V_m = \text{diag}[v_j^{(m)}]$, $\Lambda_m = [\lambda_{ij}^{(m)}]$ and $A_m = (V_m)^{-1} (\Lambda_m)^T$
- $\gamma_j^{(m)}$: j^{th} eigenvalue of matrix A_m
- $W_j^{(m)}$: j^{th} eigenvector associated with $\gamma_j^{(m)}$
- $W_j^{(m)}(i)$: i^{th} component of eigenvector $W_j^{(m)}$
- P_{Zm} : probability mass at the non zero hedging level Z_m associated with machine M_m .
- P_{0jm} : probability mass at the *virtual* hedging level zero in modes $j=2, 3, 4$
- $P_{0m} = P_{0j2} + P_{0j3} + P_{0j4}$: probability mass at the virtual hedging level $Z_{0m}=0$
- $C_j^{(m)}$: constants to be determined, $j=1, 2, 3, 4$, and relating to maintain M_m cost calculations.
- $J_m(\cdot)$: infinite horizon average production cost related to machine M_m
- $J(a)$: overall production cost for a chosen a

$$\begin{cases} J_1(a_1) = c_1 P_{Z_1} Z(a_1) + \int_{\gamma_1^{(a)}} (c_1 x_1) f(x_1) dx_1 & m=1 \\ J_m(a_{m-2}) = c_m P_{Z_m}(a_{m-2}) Z_m(a_{m-2}) + \int_{\gamma_m^{(a_{m-2})}} (c_m x_m) f(x_m) dx_m, & m=2, 3, \dots, M-1 \\ J_M(a_{M-2}) = c_M Z_M(a_{m-2}) P_{Z_M} + \int_{\gamma_M^{(a_{m-2})}} (c_M^+ x_M^+ + c_M^- x_M^-) f(x_M) dx_M, & m=M \end{cases} \quad (12)$$

and the following results are obtained :

• **For the head of the line machine M_1**

$$\begin{aligned} J_1(a_1) = & -c_1 \frac{k_1(1-a_1)}{p_1(1-\rho_1)} + \frac{c_1 k_1}{(r_1 + p_1)(1-\rho_1)} \\ & + c_1 \left(\frac{1}{\gamma_2^{(1)}} \right) \frac{(1 - (r_1 + p_1)(1-a_1))}{p_1(1-\rho_1)} \ln \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{p_1(1-\rho_1)}{(r_1 + p_1)(1-a_1)} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

with

$$Z_1 = \frac{1}{\gamma_2^{(1)}} \ln \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{p_1(1-\rho_1)}{\rho_1(r_1 + p_1)(1-a_1)} \right) \quad \text{or equivalently} \quad a_1 = 1 - \frac{p_1(1-\rho_1)}{(r_1 + p_1)(1-\rho_2^{\gamma_2^{(1)} Z_1})} \quad (14)$$

• **For an intermediate machine M_m ($m=2, 3, \dots, M-1$)**

$$\begin{aligned} J_m(a_{m-2}) = & c_m P_{Z_m}(a_{m-2}) Z_m(a_{m-2}) \\ & + c_m \sum_{j=2}^4 \frac{\left(C_j^{(m)}(a_{m-2}) \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(m)}(i, a_{m-2}^{m-1}) \right) \right)}{\gamma_j^{(m)}(a_{m-2}^{m-1})} Z_m(a_{m-2}) \\ & - c_m \sum_{j=2}^4 \frac{\left(C_j^{(m)}(a_{m-2}) \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(m)}(i, a_{m-2}^{m-1}) \right) \right)}{(\gamma_j^{(m)}(a_{m-2}^{m-1}))^2} \\ & + c_m \sum_{j=2}^4 \frac{\left(C_j^{(m)}(a_{m-2}) \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(m)}(i, a_{m-2}^{m-1}) \right) \right)}{(\gamma_j^{(m)}(a_{m-2}^{m-1}))^2} \left(e^{-\gamma_j^{(m)} Z_m(a_{m-2}^{m-1})} \right) \\ & + c_m C_1^{(m)}(a_{m-2}) \left(\sum_{i=1}^4 w_1^{(m)}(i, a_{m-1}) \right) \frac{Z_m^2(a_{m-2}^{m-1})}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

with

$$Z_m(a_{m-2}^m) = \underset{Z_m}{Arg}[(a_m + P_{0m}(a_{m-1}^{m-2}, Z_m(a_{m-2}^m)) - 1 = 0]. \quad (16)$$

while the $C_j^{(m)}$ ($m=2, 3, \dots, M-1$, $j=1, 2, 3, 4$) are computed according to (A3.2.6) in Appendix 3.

• For front-end machine M_M

$$\begin{aligned} J_M(a_{M-2}^{M-1}, Z_M) = & c_M P_{Z_M}(a_{M-2}^{M-1}) Z_M \\ & + c_M \sum_{j=2}^4 \frac{\left(C_j^{(M)}(a_{M-2}^{M-1}) \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(M)}(i, a_{M-2}^{M-1}) \right) \right)}{\gamma_j^{(M)}(a_{M-1}^{M-2})} Z_M \\ & - c_M \sum_{j=2}^4 \frac{\left(C_j^{(M)}(a_{M-2}^{M-1}) \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(M)}(i, a_{M-2}^{M-1}) \right) \right)}{(\gamma_j^{(M)}(a_{M-2}^{M-1}))^2} \\ & + c_M^+ \sum_{j=2}^4 \frac{\left(C_j^{(M)}(a_{M-2}^{M-1}) \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(M)}(i, a_{M-2}^{M-1}) \right) \right)}{(\gamma_j^{(M)}(a_{M-1}^{M-2}))^2} e^{-\gamma_j^{(M)} Z_M} \\ & + c_M^- \sum_{j=2}^4 \frac{\left(C_j^{(M)}(a_{M-2}^{M-1}) \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(M)}(i, a_{M-2}^{M-1}) \right) \right)}{(\gamma_j^{(M)}(a_{M-2}^{M-1}))^2} e^{-\gamma_j^{(M)} Z_M} \end{aligned} \quad (17)$$

with $P_{Z_M}(a_{M-2}^{M-1})$, $C_j^{(M)}(a_{M-2}^{M-1})$ given by (A3.3.5) in Appendix 3. From (17), given availability coefficients $a_{M-2}^{M-1} = (a_{m-2} \ a_{m-1})^T$, it is possible to obtain the optimal Z_m^* , via direct numerical optimization of the cost associated with the front-end machine. Thus:

$$\begin{cases} Z_M^*(a_{M-2}^{M-1}) = \inf_{Z_M} (J_M(a_{M-2}^{M-1}, Z_M)) \\ J_M^*(a_{M-2}^{M-1}) = J_M(a_{M-2}^{M-1}, Z_M^*(a_{M-2}^{M-1})) \end{cases} \quad (18)$$

- **For the overall system**

The total average production cost could be obtained by summing up individual costs (14), (16) and (17) to obtain:

$$J(a) = J_1(a_1) + \sum_{m=2}^{M-1} J_m(a_{m-2}^m) + J_M^*(a_{M-2}^{M-1}) \quad (19)$$

5. Production Optimization scheme

Equation (19) suggests that our decomposition approach which relies on a number of approximations and analytical results (machines decoupling approximations, demand averaging principle, machine Markovianization, and the development of adequate forward Kolmogorov equations for individual machines), has been quite useful since an intractable optimization problem (1-4) has been transformed into a tractable one, consisting of minimizing the overall cost in (19), i.e. compute a^* whenever it exists, where:

$$a^* = \text{Arg} [\min (J(a))]. \quad (20)$$

Now, from (14), (16), (18) and (20) the optimal hedging levels for the original production problem within a class of DHP policies considered are given as follows:

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{1}{\gamma_2^{(1)}} \ln \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{p_1(1-\rho_1)}{\rho_1(r_1 + p_1)(1-a_1)} \right), \\ Z_m^* = Z_m(a_{m-2}^*, a_{m-1}^*) \\ Z_M^* = Z_M^*(a_{m-2}^*, a_{m-1}^*) \end{cases} \quad (21)$$

The solution of this static optimization program could be computed using any adequate numerical method. In the following section, we describe a hierarchical numerical optimization algorithm which relies on a gradient search technique, guided however by a theoretically founded parameter initialization scheme.

5.1 Hierarchical optimization scheme

- **Step 1** Specify input data: rates $r_m, p_m, k_m, (m=1, 2, \dots, M)$, d , tolerance ε , and acceleration coefficient ρ ,
- **Step 2** Specify the initial condition vector $a^{(0)}$ and compute $J(a^{(0)})$ as in Appendix 3. Note that $a^{(0)}$ can often constitute a satisfactory optimum. However, if further improvements are required, update index $k=0$ and go to step 3. Otherwise, jump to step 6.
- **Step 3** Increment index k : $k+1 \leftarrow k$
 - **Step 3.1** $a^{(k)} = a^{(k-1)} + \rho \text{grad}(J^{(k-1)})$
 - **Step 3.2** Compute $J_1^{(k)}$ from (13)
 - **Step 3.3** For $m=2, 3, \dots, M$
 - **Step 3.3.1** Recursively, compute $\tilde{r}_{m-1}, \tilde{p}_{m-1}$ according to (10) for $m=2, 3, \dots, M-1$. Compute $\Lambda_m^{(k)}, V_m$ and $A_m^{(k)} = (V_m)^{-1} (\Lambda_m^{(k)})^T$ (see (A3.1.0), (A3.2.0), and (A3.3.3)).
 - **Step 3.3.2** Compute eigenvalues $\gamma_j^{(m)}$ and eigenvectors $W_j^{(m)}$ for $A_m^{(k)}$
 - **Step 3.3.3** Symbolically, compute the unknowns:
$$P_{Zm}, P_{0mj}, j=2,3,4; C_1^{(m)}, C_2^{(m)}, C_3^{(m)}, C_4^{(m)} \text{ from (A3.2.6)}$$

(as analytical functions of Z_m for $m=2, \dots, M-1$)

$P_{ZM}; C_2^{(M)}, C_3^{(M)}, C_4^{(M)}$ from (A3.3.5) for $m=M$

(as analytical functions of Z_M)

- **Step 3.3.4** Compute the solution $Z_m^{(k)}(a_{m-2}^{(k)}, a_{m-1}^{(k)}, a_m^{(k)})$ of equation (16):

for $m=2, 3, \dots, M-1$.

Compute also the optimal $Z_M^*(a_{M-2}^{(k)}, a_{M-1}^{(k)})$ by solving (16).

- **Step 3.3.5** Compute $J_m^{(k)}$ from (15) for $2 \leq m \leq M-1$,

Compute $J_M^{(k)}$ from (17)

- **Step 4** Compute the overall cost $J(a)^{(k)}$ according to (18)
- **Step 5** Test $\|J(a)^{(k)} - J(a)^{(k-1)}\|_2 < \varepsilon$ and GO to step 6, otherwise RETURN to step 3
- **Step 6** Declare $a_1^*, a_2^*, \dots, a_M^*; Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_M^*; \text{ and } J^*(a^*)$.
- **END**

5.2 Admissible availability coefficients of WIP and initial conditions

The admissible range of vector a is dictated by the application of the ergodicity criterion established in Mahamé ([26]) to each Markovianized single machine equivalent. From both the Markovian nature of the head of the line machine M_1 and the Markovianized version of the remaining machines (see Fig. 4), it is easy to derive the steady-state probability $\pi_1^{(m)}$ for machine M_m to be in the unique feasible state 1. This yields:

$$\begin{cases} \pi_1^{(1)} = \frac{r_1}{r_1 + p_1}, \pi_2^{(1)} = \frac{p_1}{r_1 + p_1}; & m = 1 \\ \pi_1^{(m)}(a_{m-1}) = \frac{r_m}{r_m + p_m} a_{m-1}; & m = 2, 3, \dots, M \end{cases} \quad (22)$$

Then, a straightforward application of results of the ergodicity theorem (see [26]) leads to the following bounds for a_1, a_2, \dots, a_{M-1} .

$$\begin{cases} \text{Max} \left(\frac{r_1}{r_1 + p_1}, \frac{(r_2 + p_2)}{r_2} \left(\frac{d}{k_2} \right) \right) < a_1 < 1; \quad m = 1 \\ \frac{(r_m + p_m)}{r_m} \left(\frac{d}{k_m} \right) < a_{m-1} < 1; \quad m = 2, 3, \dots, M \end{cases} \quad (23)$$

In order to complete the optimization algorithm initiated in Section 5.1, an appropriate initialization procedure needs to be specified.

5.3 Optimal initial conditions for the proposed optimization scheme

A suboptimal initial condition, can be derived from an analysis of a further simplified individual *two-state* aggregated version of all equivalent machines (see *Appendix 4* for more details). Indeed, cost expressions associated with isolated further machines can be obtained based on the two-state approximations, and the resulting optimal coefficients of availability can be obtained via a linearization of the corresponding optimality conditions. The expression for the suboptimal initial conditions investigated in *Appendix 4* are as follows:

$$\begin{cases} (a_{10})^* = \frac{\left(\frac{d^2(\bar{J}_1(a_1))}{d^2 a_1} + \frac{\partial^2(\bar{J}_2(a_1^2))}{\partial^2 a_1} + \frac{\partial^2(\bar{J}_3(a_1^3))}{\partial^2 a_1} \right)_{\hat{a}_1} - \left(\frac{d(\bar{J}_1(a_1))}{da_1} + \frac{\partial(\bar{J}_2(a_1^2))}{\partial a_1} + \frac{\partial(\bar{J}_3(a_1^3))}{\partial a_1} \right)_{\hat{a}_1}}{\left(\frac{d^2(\bar{J}_1(a_1))}{d^2 a_1} + \frac{\partial^2(\bar{J}_2(a_1^2))}{\partial^2 a_1} + \frac{\partial^2(\bar{J}_3(a_1^3))}{\partial^2 a_1} \right)_{\hat{a}_1}} \\ (a_m^0)^* = \frac{\left(\sum_{i=0}^{\hat{a}_m} \left(\frac{\partial^2(\bar{J}_{m+i}(a_{m+i-2}^{m+i}))}{\partial^2 a_m} \right)_{\hat{a}_m} \right) \hat{a}_m - \sum_{i=0}^{\hat{a}_m} \left(\frac{\partial(\bar{J}_{m+i}(a_{m+i-2}^{m+i}))}{\partial a_m} \right)_{\hat{a}_m}}{\sum_{i=0}^{\hat{a}_m} \left(\frac{\partial^2(\bar{J}_{m+i}(a_{m+i-2}^{m+i}))}{\partial^2 a_m} \right)_{\hat{a}_m}}, \quad m = 2, 3, \dots, M-2 \\ (a_{M-1}^0)^* = \frac{\left(\frac{d^2(\bar{J}_{M-1}(a_{M-1}^{M-1}))}{d^2 a_{M-1}} + \frac{\partial^2(\bar{J}_M(a_{M-1}^{M-1}))}{\partial^2 a_{M-1}} \right)_{\hat{a}_{M-1}} - \left(\frac{d(\bar{J}_{M-1}(a_{M-1}^{M-1}))}{da_{M-1}} + \frac{\partial(\bar{J}_M(a_{M-1}^{M-1}))}{\partial a_{M-1}} \right)_{\hat{a}_{M-1}}}{\left(\frac{d^2(\bar{J}_{M-1}(a_{M-1}^{M-1}))}{d^2 a_{M-1}} + \frac{\partial^2(\bar{J}_M(a_{M-1}^{M-1}))}{\partial^2 a_{M-1}} \right)_{\hat{a}_{M-1}}} \end{cases} \quad (24)$$

In (24), \hat{a} is a value of vector a , the components of which are chosen in the left neighborhood of 1, whereas \tilde{J}_m denotes the cost for the aggregated two-state version of machine M_m ($m=1, 2, M-1$) (see Appendix 4). Despite the relatively high degree of approximations involved in this initialization procedure, a number of numerical examples indicate that the suboptimal initial condition (24) is in general close to the optimal solution a^* .

6. Numerical results

In this section, the proposed DHP based-optimization is tested on an array of stochastic three-machine flow shops. A number of findings will be pointed out from four classes of samples systems ($\{S_1, S_2, S_3, S_0\}$, $\{S_4, S_5, S_6, S_0\}$, $\{S_0, S_7, S_8, S_9\}$ and $\{S_0, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}$) summarized in Table 1. Notice that S_0 is the basic sample system, whereas each system S_i ($i=1, \dots, 12$) results from the perturbation of some parameter of interest. Changes away from the base case are highlighted for clarity.

6.1 Simulations and findings

In order to have a clear idea of the shapes of production costs under DHP policies, it has been necessary to carry out simulations over the whole admissible range of a for the basic system S_0 . In this case, the shape of the overall cost obtained is depicted in Fig. 5, it appears that:

- The overall production cost is convex over the whole admissible range of $a=(a_1, a_2)^T$.
- The optimal solution a^* (or equivalently Z_1^*, Z_2^*, Z_3^*) exists and is unique.

For all classes of sample systems considered in Table 1, optimal costs obtained using our DHP policy optimization approach method have been compared to those estimated from Monte Carlo based simulations, under identical production control laws.

Table 1: Set of parameters of a three-machine flow shop: S_0 is the base case, and changes away from nominal parameters are highlighted.

S	Data for machines $M_1 M_2 M_3$									Costs data and demand rate d				
	p_1	p_2	p_3	r_1	r_2	r_3	k_1	k_2	k_3	c_1	c_2	c_3	C_3	d
S_1	0.04	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	1	2	2	10	1
S_2	0.06	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	1	2	2	10	1
S_3	0.08	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	1	2	2	10	1
S_4	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	0.4	2	2	10	1
S_5	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	0.6	2	2	10	1
S_6	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	0.8	2	2	10	1
S_0	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	1	2	2	10	1
S_7	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.6	2.5	2.25	2	1	2		9	1
S_8	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.8	2.5	2.25	2	1	2		8	1
S_9	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	1	2.5	2.25	2	1	2		6	1
S_{10}	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	1	2	2	10	0.97
S_{11}	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	1	2	2	10	0.94
S_{12}	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	2.5	2.25	2	1	2	2	10	0.90

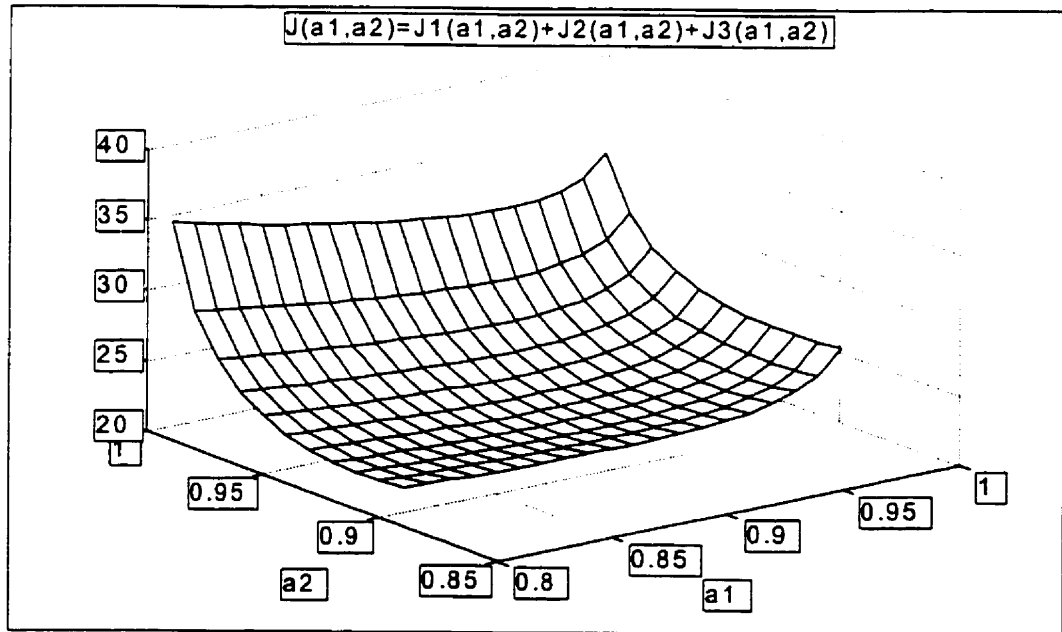


Fig. 5: Shape of the overall production cost for system S_0 under DHPC

Numerical results are summarized in Table 2. The following observation can be made:

- The optimal initial condition \hat{a}^* is in general very close to the optimum a^* .
- As previously observed (see [30]), DAP appears to be an excellent approximation for machine M_1 since J_1^{dhp} is similar to J_1^{MC} in all cases. It is also a very good one for machine M_2 , given the small differences between J_2^{dhp} and J_2^{MC} , although in this case two additional sources of errors may be pointed out, namely the machine decoupling approximation, and the low order Markovianization involved.
- While theoretically computed costs for the first two machines are in very good agreement with their Monte Carlo counterparts, this is less the case for the third machine for which a discrepancy up to 20 % is recorded. We conjecture that this is mainly due to the chosen *lowest order Markovianization* of the availability process $I_{x_2>0}$. Indeed, its two-state Markovian model obtained from Fig. 3 is a highly approximate version of its four-state counterpart shown in Fig. A.1.2 (Appendix 1). Notice that, the use a four-state Markovian model of $I_{x_2>0}$ obtained from Fig. A.1.2, together with the two-state Markov chain associated with the failure prone character of M_3 , would lead to a *more accurate eight-state* (instead of a four-state model as adopted in Fig. 4 for simplicity) model associated with machine M_3 . Thus, improvements of the results reported in this paper are likely by means of the computation of an eight Markovian model of M_3 .
- Theoretical computations appear to slightly overestimate the real cost, but if this is uniformly the case around the real optimum, the impact of the error on the estimation of the optimum could be limited.
- The DHP hierarchical method provides good overall performance compare to alternative Monte Carlo based optimization over the same class of control laws.
- Using Matlab V computing capabilities with a Pentium 200 Mhz PC-station, while in each case presented in Table 2, the Monte Carlo procedure requires at least 12 hours of hard computations, by contrast, the proposed DHP method has proved to reach the optimum in the order of a minute. This makes it a good and competitive

candidate for practical implementation in stochastic tandem manufacturing flow shops.

7. Conclusion

The proposed hierarchical decision making in single-part-type, multi-machine flow shops under DHP policies is characterized by a decomposition of a stochastic M-machine flow shop into a set of M *stochastic single machine subsystems*. The decomposition is founded on approximate decoupling principles, in particular, the demand averaging principle which greatly facilitates the analysis of individual machines once adequately Markovianized. In addition, the strong reliance of the approach on existing analytical results and their extensions, coupled with an efficient parametrization in terms of the availability coefficients space, together with an effective initialization strategy, have led to a *very fast optimization scheme* with good performance. This makes it a good candidate for real time use in tandem manufacturing facilities. Numerical results arising from the analysis of a number of samples systems indicate that, the convexity property of the overall production cost appears to hold, and it would be of interest to establish, in future works, theoretical conditions for the validity of this property. Discrepancies in cost computations relative to Monte Carlo based results point at what may be necessary (and possible) improvements in the Markovianization procedure for the equivalent equivalent machines. Finally, the generalizations of the hierarchical optimization scheme initiated herein to multi-part-type flow shops as well as to job shops would be an interesting avenue for future research.

*Table 2 : Summary of results – Comparison of optimal DHP method
and Monte Carlo based- optimization*

S	Optimal characteristics for DHP policies							Optimal DHP costs J*dhp and Monte Carlo costs J*MC							
	a_{10}^*	a_{20}^*	a_1^*	a_2^*	Z_1^*	Z_2^*	Z_3^*	J_1^*	J_1^*	J_2^*	J_2^*	J_3^*	J_3^*	J^*	J^*
								dhp	MC	dhp	MC	dhp	MC	dhp	MC
S1	0.903	0.905	0.91	0.91	0.025	3.65	5.321	0.02	0.02	5.61	5.13	14.88	18.9	20.5	24.0
S2	0.903	0.905	0.89	0.91	0.429	3.95	5.334	0.37	0.375	5.98	5.38	14.94	18.1	21.3	23.8
S3	0.903	0.905	0.91	0.91	0.025	3.65	5.32	0.03	0.023	5.61	5.15	14.88	17.8	20.5	23.0
S4	0.905	0.905	0.96	0.92	4.399	3.22	4.965	1.51	1.44	5.16	4.70	14.11	17.2	20.8	23.3
S5	0.904	0.905	0.94	0.91	3.234	3.20	5.289	1.64	1.60	5.01	4.5	14.78	17.8	21.4	23.9
S6	0.904	0.905	0.91	0.91	2.107	3.65	5.32	1.39	1.33	5.61	4.94	14.88	18.5	21.9	24.8
S0	0.906	0.905	0.89	0.91	1.560	3.95	5.339	1.28	1.23	5.98	5.22	14.94	19.0	22.2	25.5
S7	0.903	0.907	0.88	0.90	1.325	3.74	3.222	1.08	1.03	5.58	4.86	10.30	14.5	17.0	20.4
S8	0.903	0.907	0.88	0.90	1.32	3.74	1.085	1.08	1.04	5.58	4.92	8.59	11.8	15.2	16.8
S9	0.903	0.907	0.88	0.90	1.325	3.74	1.824	1.084	1.03	5.58	4.89	7.74	11.1	14.4	16.9
S10	0.903	0.904	0.89	0.91	1.510	3.95	4.877	1.242	1.20	5.98	5.39	13.89	17.5	21.1	24.1
S11	0.903	0.905	0.90	0.90	1.701	3.44	4.71	1.41	1.41	5.21	7.84	13.42	14.0	20.0	23.2
S12	0.903	0.904	0.90	0.89	1.624	3.16	4.42	1.348	1.310	4.75	4.41	12.66	15	18.8	20.7

Appendix 1:

Proof of proposition 1

Consider the binary random process $I_{x_{m-1}}(t)$ shown in fig. A1-1 together with its immediate upstream machine M_{m-1} . Because the supply process $I_{x_{m-2}}(t)$ is not reliable, our aim is to show that the joint process consisting of machine M_{m-1} together with its supply process $I_{x_{m-2}}(t)$, is equivalent in an average sense to a standard macro-machine, the repair rate of which is given by (10). For that purpose, given a two-state Markovianized version of the process $I_{x_{m-2}}$ (see Fig. 3) and that of the two-state Markovian machine M_{m-1} with state ξ_{m-1} , also given the machine decoupling approximation, a four-state Markovian representation of the joint process $\{I_{x_{m-2}}, \xi_{m-1}\}$

can be built according to Fig. A.1.2. Notice that demand can be met only in the feasible state 1. The idea behind the rest of our argument is to lump all deficit modes 2, 3 and 4

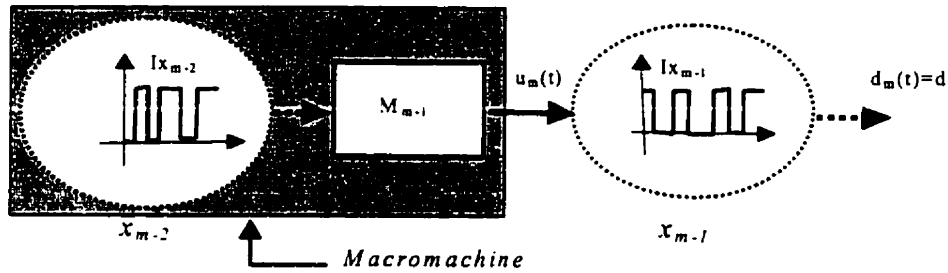


Fig. A.1.1: Binary-Markov process Ix_{m-1} (supplier of machine M_m) and its associated upstream machine M_{m-1} ($m=1, 2, \dots, M$)

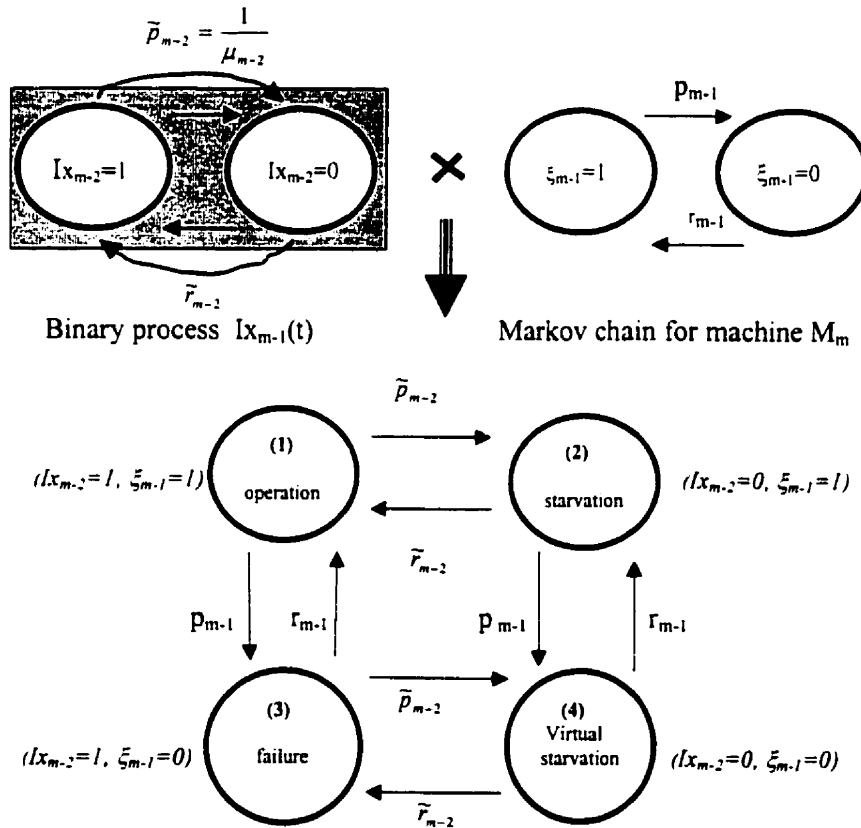


Fig. A.1.2: Markovian scheme for the joint process (Ix_{m-2}, ξ_{m-1}) ($m=2, 3, \dots, M$)

Figure A1: Markovian model of Machine M_m ($m=2, 3, \dots, M$)

Given that $k_{m-1} > k_m$ by assumption, the average switching rate from $I_{x_{m-1}}=0$ to $I_{x_{m-1}}=1$ is dictated by the repair rate \tilde{r}_{m-1} computed above. But (A.1.2) is essentially the result in (10).

Appendix 2

Transient flow balance equations under hedging policies

Consider a manufacturing system consisting of a single n -mode Markovian machine with m feasible modes (modes for which the demand can be met). Define Z_1, Z_2, \dots, Z_m as hedging levels associated with feasible modes 1, 2, ..., m respectively. Assuming that R_i ($i=1, 2, \dots, m$) is the i^{th} region defined by between $Z_i \leq x \leq Z_{i+1}$, $f_j(x)$ being the probability density of $x(t)$ in mode j ($j=1, \dots, n$) and λ_{ij} =transition rate from mode i to mode j , we recall the following theorem:

Theorem 1 (Malhamé and Boukas [27])

Under a hedging policy with hedging levels Z_1, Z_2, \dots, Z_k ($Z_1 > Z_2 > \dots, Z_{m-1} > Z_m$), the hybrid density vector, $f(x) = (f_1(x) \dots f_n(x))^T$, if it exists, will satisfy in region R_i , ($i=1, 2, \dots, m-1$) defined by $Z_i \leq x \leq Z_{i+1}$, the following forward Kolmogorov *partial differential equation*:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -V^{(i)} \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x} + \Lambda^T f(x(t), t) \\ \text{with } V^{(i)} = \text{diag}[v_j], \Lambda = \text{diag}[\lambda_{ij}] \end{cases} \quad (\text{A2.1})$$

The boundary conditions associated with (A2.1) are as follows:

$$\begin{cases} \lambda_{ij} P_{Z_i}(t) + v_j^{(i)} f_j(Z_i^-, t) - v_j^{(i-1)} f_j(Z_i^+, t) = 0 & \text{for } j \neq i \\ \dot{P}_{Z_i}(t) = \left(-\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \right) P_{Z_i}(t) + v_j^{(i)} f_j(Z_i^-, t) - v_j^{(i-1)} f_j(Z_i^+, t) & \text{for } i = j \end{cases} \quad (\text{A2.2})$$

In addition, $f(x, t)$ is zero for $x > Z_1$ and at $x \rightarrow -\infty$. More specifically:

$$\begin{cases} f(x, t) = 0 & \forall x \in \mathfrak{R}_0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, t) = 0 \end{cases} \quad \text{with } \mathfrak{R}_0 \text{ defined by } x > Z_1 \quad (\text{A2.3})$$

Furthermore, in (A2.2), the following physical interpretations can be made:

- $v_j^{(i)} f_j(x, t)$ is the *probability current* at position x , at time t , for state j and in region R_i
- $v_j^{(i)} f_j(Z_i^-, t) - v_j^{(i-1)} f_j(Z_i^+, t)$ is the net *probability current* into a hedging level Z_i in mode $j \neq i$. The size of the discontinuity is $\lambda_{ij} P_{Z_i}(t)$ (switching rate from mode i to j at Z_i)

Appendix 3: Steady-state solutions of the probability flow balance equations

Notice that in steady-state (assuming that the ergodicity theorem established in [26] is satisfied), $\frac{\partial f(x(t), t)}{\partial t} = 0$, in which case (A2.1) becomes

$$\frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} = V^{-1} \Lambda^T f(x(t)). \text{ Thus, using the fact that } \dot{P}_{Z_i}(t) = 0 \text{ in (A2.2), together with}$$

the appropriate normalization conditions, the complete steady-state solution can be determined. The aim of this Appendix is to apply or adapt this type of feature to obtain the steady-state statistics of *the probability vector field* for $x_m(t)$ ($m=1, 2, \dots, M$) as shown in Fig. A3.

Appendix 3-1: Case of the head of the line machine M_1

The boundary conditions derived from Fig. A3-1, given the parameters :

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1^{(0)} = k_1 - d & 0 \\ 0 & v_2^{(0)} = v = -d \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -P_1 & P_1 \\ r_1 & -r_1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = (V_1)^{-1} \Lambda_1, \\ \lambda_1^{(0)} = \alpha, \quad \lambda_2^{(0)} = -\frac{r_1 v_1 + P_1 v_2}{v_1 v_2}, \quad \psi^{(0)} = \begin{pmatrix} r_1 \\ P_1 \end{pmatrix}^T, \quad \Psi^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{v_1} & 1 \end{pmatrix}^T \quad (\text{A3.1.0})$$

are as follows:

At the hedging level Z_1 :

$$\begin{cases} \lambda_{12}^{(1)} P_{Z_1}(t) + v_2^{(1)} f_2(Z_1^-, t) = 0 \\ \lambda_{11}^{(1)} P_{Z_1}(t) + v_1^{(1)} f_1(Z_1^-, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{A3.1.1})$$

At the virtual hedging level $Z_{01}=0$:

$$\dot{P}_{01} = \lambda_{21}^{(1)} P_{01}(t) + v_1^{(1)} f_1(Z_0^+, t) \quad (\text{A3.1.2})$$

In the steady-state, one obtains the following results :

$$\begin{cases} f_i(x_1) = C_1^{(1)} W_1^{(1)}(i) + C_2^{(1)} W_2^{(2)}(i) e^{(x_1 - Z_1)} \\ f(x) = \sum_{i=1}^2 f_i(x_1) = C_1^{(1)} \sum_{i=1}^2 W_1^{(1)}(i) + C_2^{(1)} \left(\sum_{i=1}^2 W_1^{(1)}(i) \right) e^{(x_1 - Z_1)} \end{cases} \quad (\text{A3.1.3})$$

with constants $C_j^{(1)}$ ($j=1, 2$) and probability masses (P_{Z_1}, P_{01}) given by:

$$\begin{pmatrix} P_{Z1} \\ P_{01} \\ C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p_1}{v_1} = \frac{\lambda_{11}^{(1)}}{v_1} & 0 & \frac{r_1}{p_1} = w_1^{(1)}(1) & -\frac{v_2}{v_1} = w_2^{(1)}(1) \\ \frac{p_1}{v} = \frac{\lambda_{12}^{(1)}}{v} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{r_1}{v_1} = \frac{-\lambda_{21}^{(1)}}{v_1} & \frac{r_1}{p_1} = w_1^{(1)}(1) & w_2^{(1)}(1)e^{-r_1^{(1)}Z_1} \\ 1 & 1 & (w_1(1) + w_1(2))Z_1 & \frac{(w_2(1) + w_2(2))(1 - e^{-r_2^{(1)}Z_1})}{r_2^{(1)}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A3.1.4)$$

After simplification, we obtain exactly Hu's results [21], where $C_1^{(1)}=0$ and $P_{Z0}=1-a_1$.

Appendix 3-2: Case of an intermediate type of machine – An extension of Sharifnia's results to the no backlog case

A modification of the boundary equations of Theorem 1 is needed in Fig. A3-2, where a marginal fictitious hedging level $Z_{0mj}=0$ is assigned to each one of the deficit modes $j=2, 3$ and 4 , in order to satisfy the state constraint $x_m(t) \geq 0$. In effect, we pretend as if failure modes were feasible, but with a fictitious zero hedging level. Since, $Z_{0m2}=Z_{0m3}=Z_{0m4}=Z_{0m}$, the probability P_{0m} of being at the common fictitious hedging level $Z_{0m}=0$ is such that $P_{0m} = P_{0m2} + P_{0m3} + P_{0m4}$. Given these remarks, along with the following parameters:

(A3.2.0)

$$\Lambda_m(a_{m-1}) = \begin{pmatrix} -(p_m + \tilde{p}_{m-1}) & \tilde{p}_{m-1} & p_m & 0 \\ \tilde{r}_{m-1} & -(p_m + \tilde{r}_{m-1}) & 0 & p_m \\ r_m & 0 & -(r_m + p_m) & p_{0m} \\ 0 & \tilde{r}_{m-1} & r_m & -(r_m + \tilde{r}_{m-1}) \end{pmatrix} = [\lambda_y],$$

$$V_m = \begin{pmatrix} v_1^{(m)} = k_1^{(m)} - d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2^{(m)} = v = -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^{(m)} = v = -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^{(m)} = v = -d \end{pmatrix}$$

the boundaries conditions derived from Fig. A3 are as follows:

At the hedging level Z_m :

$$\begin{cases} \lambda_{12}^{(m)} P_{Z_m}(t) - d f_2(Z_m^-, t) = 0 \\ \lambda_{13}^{(m)} P_{Z_m}(t) - d f_3(Z_m^-, t) = 0 \\ \dot{P}_{Z_m}(t) = \lambda_{11}^{(m)} P_{Z_m}(t) + v_1^{(m)} f_1(Z_m^-, t) = 0 \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} v_1^{(m)} = k_1^{(m)} - d \\ \lambda_{11}^{(m)} = -(p_m + p_{0m}) \end{cases} \quad (\text{A3.2.1})$$

At the virtual hedging level $Z_{0m}=0$,

$$\begin{cases} \lambda_{21}^{(m)} P_{0m2}(t) + \lambda_{31}^{(m)} P_{0m3}(t) - v_1^{(m)} f_1(Z_{0m}^+, t) = 0 \\ \dot{P}_{0m2}(t) = (-\lambda_{21}^{(m)} - \lambda_{24}^{(m)}) P_{0m2}(t) + \lambda_{42}^{(m)} P_{0m4}(t) + d f_2(Z_{0m}^+, t) \\ \dot{P}_{0m3}(t) = (-\lambda_{31}^{(m)} - \lambda_{34}^{(m)}) P_{0m3}(t) + \lambda_{43}^{(m)} P_{0m4}(t) + d f_3(Z_{0m}^+, t) \\ \dot{P}_{0m4}(t) = (-\lambda_{42}^{(m)} - \lambda_{43}^{(m)}) P_{0m4}(t) + \lambda_{24}^{(m)} P_{0m2}(t) + \lambda_{34}^{(m)} P_{0m3}(t) + d f_4(Z_{0m}^+, t) \end{cases} \quad (\text{A3.2.2})$$

In the steady state, the following solutions are obtained:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} f_1(X_m) \\ f_2(X_m) \\ f_3(X_m) \\ f_4(X_m) \end{pmatrix} = C_1^{(m)} w_1^{(m)} + \sum_{j=2}^4 C_j^{(m)} w_j^{(m)} e^{\gamma_j^{(m)}(X_m - Z_m)} \\ f(X_m) = C_1^{(m)} \left(\sum_{i=1}^4 w_i^{(m)}(i) \right) + \sum_{j=2}^4 \left(C_j^{(m)} \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(m)}(i) \right) e^{\gamma_j^{(m)}(X_m - Z_m)} \right) \end{cases} \quad (\text{A3.2.3})$$

in which constants $C_j^{(m)}$ need to be determined for $j=2, 3, 4$ and 5.

For that purpose, denoting $s_k^{(m)} = \sum_{i=1}^4 w_k^{(m)}(i)$, $k=1, 2, 3, 4$ and using in (A3.2.1), (A3.2.2), the steady-state structures associated with boundary equations at Z_m and Z_{0m} respectively, i.e.:

$$\begin{cases} f_1(Z_m^-) = \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{k_1 - d} P_{Z_m}(t) = C_1^{(m)} W_1^{(m)}(1) + C_2^{(m)} W_2^{(m)}(1) + C_3^{(m)} W_3^{(m)}(1) + C_4^{(m)} W_4^{(m)}(1) \\ f_2(Z_m^-) = \frac{\lambda_{12}}{d} P_{Z_m}(t) = C_1^{(m)} W_1^{(m)}(2) + C_2^{(m)} W_2^{(m)}(2) + C_3^{(m)} W_3^{(m)}(2) + C_4^{(m)} W_4^{(m)}(2) \\ f_3(Z_m^-) = \frac{\lambda_{13}}{d} P_{Z_m}(t) = C_1^{(m)} W_1^{(m)}(3) + C_2^{(m)} W_2^{(m)}(3) + C_3^{(m)} W_3^{(m)}(3) + C_4^{(m)} W_4^{(m)}(3) \end{cases} \quad (A3.2.4)$$

and

$$\begin{cases} f_1(Z_0^-) = \frac{1}{v_1} (\lambda_{21}^{(m)} P_{0m2}(t) + \lambda_{31}^{(m)} P_{0m3}(t)) = C_1^{(m)} W_1^{(m)}(1) + \sum_{j=2}^4 C_j^{(m)} W_j^{(m)}(1) e^{-\gamma_j Z_0} \\ f_2(Z_0^-) = \frac{1}{d} (\lambda_{21}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)}) P_{0m2}(t) - \frac{\lambda_{42}^{(m)}}{d} P_{0m4}(t) = C_1^{(m)} W_1^{(m)}(2) + \sum_{j=2}^4 C_j^{(m)} W_j^{(m)}(2) e^{-\gamma_j Z_0} \\ f_3(Z_0^-) = \frac{1}{d} (\lambda_{31}^{(m)} + \lambda_{34}^{(m)}) P_{0m3}(t) - \frac{\lambda_{43}^{(m)}}{d} P_{0m4}(t) = C_1^{(m)} W_1^{(m)}(3) + \sum_{j=2}^4 C_j^{(m)} W_j^{(m)}(3) e^{-\gamma_j Z_0} \\ f_4(Z_m^-) = -\frac{1}{d} (\lambda_{24}^{(m)} P_{0m2}(t) + \lambda_{34}^{(m)} P_{0m3}(t)) + \frac{1}{d} (\lambda_{42}^{(m)} + \lambda_{43}^{(m)}) P_{0m4}(t) = C_1^{(m)} W_1^{(m)}(4) + \sum_{j=2}^4 C_j^{(m)} W_j^{(m)}(4) e^{-\gamma_j Z_0} \end{cases} \quad (A3.2.5)$$

one could obtain eight linear equations, with eight unknowns parameters: P_{Z_m} , P_{0m1} , P_{0m2} , P_{0m3} , P_{0m4} , $C_1^{(m)}$, $C_2^{(m)}$, $C_3^{(m)}$.

A straightforward development leads to:

$$\begin{pmatrix} P_{Z_m} \\ P_{0m2} \\ P_{0m3} \\ P_{0m4} \\ C_1^{(m)} \\ C_2^{(m)} \\ C_3^{(m)} \\ C_4^{(m)} \end{pmatrix} C_3^{(m)} = \begin{pmatrix} [M_{11}^{(m)}] & [M_{12}^{(m)}] \\ [M_{21}^{(m)}] & [M_{22}^{(m)}] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A3.2.6)$$

$$P_{0m} = P_{02} + P_{03} + P_{04}$$

with:

$$M_{11}^{(m)} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{12}^{(m)} + \lambda_{13}^{(m)}}{v_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_{12}^{(m)}}{d} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_{13}^{(m)}}{d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_{21}^{(m)}}{v_1} & -\frac{\lambda_{31}^{(m)}}{v_1} \end{pmatrix}, \quad M_{12}^{(m)} = \begin{pmatrix} w_1(1) & w_2(1) & w_3(1) & w_4(1) \\ w_1(2) & w_2(2) & w_3(2) & w_4(2) \\ w_1(3) & w_2(3) & w_3(3) & w_4(3) \\ w_1(4) & w_2(4) & w_3(4) & w_4(4) \end{pmatrix} \quad (\text{A3.2.7})$$

$$M_{21}^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(\lambda_{12}^{(m)} + \lambda_{13}^{(m)})}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda_{31}^{(m)} + \lambda_{34}^{(m)})}{v_1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_{24}^{(m)}}{d} & \frac{\lambda_{34}^{(m)}}{d} & -\frac{(\lambda_{42}^{(m)} + \lambda_{43}^{(m)})}{d} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{22}^{(m)} = \begin{pmatrix} w_1(2) & w_2(2)e^{-\gamma_2 L_0} & w_3(2)e^{-\gamma_3 L_0} & w_4(2)e^{-\gamma_4 L_0} \\ w_1(3) & w_2(3)e^{-\gamma_2 L_0} & w_3(3)e^{-\gamma_3 L_0} & w_4(3)e^{-\gamma_4 L_0} \\ w_1(4) & w_2(4)e^{-\gamma_2 L_0} & w_3(4)e^{-\gamma_3 L_0} & w_4(4)e^{-\gamma_4 L_0} \\ S_1^{(m)} Z_m & \frac{S_2^{(m)}}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 L_0}) & \frac{S_3^{(m)}}{\gamma_3} (1 - e^{-\gamma_3 L_0}) & \frac{S_4^{(m)}}{\gamma_4} (1 - e^{-\gamma_4 L_0}) \end{pmatrix} \quad (\text{A3.2.8})$$

Appendix 3-3: Case of the front-end machine M_M

The boundary equations obtained from Fig. A3-3 at Z_M , i.e.,

$$\begin{cases} \lambda_{12}^{(M)} P_{Z_M}(t) + v f_2(Z_M^-, t) = 0 \\ \lambda_{13}^{(M)} P_{Z_M}(t) + v f_3(Z_M^-, t) = 0 \\ \dot{P}_{Z_M}(t) = \lambda_{11}^{(M)} P_{Z_M}(t) + v_1^{(M)} f_1(Z_M^-, t) \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} v_1^{(M)} = k_1^{(M)} - d, \quad v = -d \\ \lambda_{11}^{(M)} = -(p_M + p_{0M}) \end{cases} \quad (\text{A3.3.1})$$

become in the steady state:

$$\begin{cases} \lambda_{12}^{(M)} P_{Z_M} + \nu f_2(Z_M^-) = 0 \\ \lambda_{13}^{(M)} P_{Z_M} + \nu f_3(Z_M^-) = 0 \\ \frac{dP_{Z_M}}{dt} = \lambda_{11}^{(M)} P_{Z_M} + \nu f_1(Z_M^-) \end{cases} \quad (\text{A3.3.2})$$

Now, given the matrices,

$$\Lambda_M = \begin{pmatrix} -(p_M + \tilde{p}_{M-1}) & \tilde{p}_{M-1} & p_M & 0 \\ \tilde{r}_{M-1} & -(p_M + \tilde{r}_{M-1}) & 0 & p_M \\ r_M & 0 & -(r_M + p_{0M}) & p_{0M} \\ 0 & \tilde{r}_{M-1} & r_M & -(r_M + \tilde{r}_{M-1}) \end{pmatrix}, \quad V_M = \begin{pmatrix} \nu_M = k_1^{(M)} - d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu = -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \quad (\text{A3.3.3})$$

the probability density needed for x_M is given by:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} f_1(x_M) \\ f_2(x_M) \\ f_3(x_M) \\ f_4(x_M) \end{pmatrix} = C_1^{(M)} w_1^{(M)} + \sum_{j=2}^4 C_j^{(M)} w_j^{(M)} e^{\gamma_j^{(M)}(x_M - Z_M)} \\ f(X_M) = C_1^{(M)} \left(\sum_{i=1}^4 w_1^{(M)}(i) \right) + \sum_{j=2}^4 \left(C_j^{(M)} \left(\sum_{i=1}^4 w_j^{(M)}(i) \right) e^{\gamma_j^{(M)}(X_M - Z_M)} \right) \end{cases} \quad (\text{A3.3.4})$$

where $C_1^{(M)} = 0$ since $f_1(-\infty) = 0$ (see equation (A.2.3) of Theorem 1) for all $i = 1, 2, 3, \dots$,

4. In addition, the probability mass P_{0M} and constants $C_j^{(M)}$ ($j = 2, 3, 4$) must be specified from (A3.3.2-A3.3.4) and using the normalized equation

$P(Z_M) + \int_{-\infty}^{\infty} f(X_M) dX_M = 1$ Calculations similar to those in Appendix 3.2 lead to:

$$\begin{pmatrix} P_{Z_M} \\ C_2^{(M)} \\ C_3^{(M)} \\ C_4^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(p_M + \tilde{p}_{M-1}(a_{M-1}, a_{M-2}))}{k_2 - d} & w_2^{(M)} & w_3^{(M)} & w_4^{(M)} \\ -\frac{\tilde{p}_{M-1}}{d} & w_2^{(M)}(2) & w_3^{(M)} & w_3^{(M)} \\ -\frac{p_2}{d} & w_2^{(M)} & w_3^{(M)} & w_4^{(M)} \\ 1 & \frac{\sum_{i=1}^4 w_2^{(M)}(i)}{\gamma_2^{(M)}} & \frac{\sum_{i=1}^4 w_3^{(M)}(i)}{\gamma_3^{(M)}} & \frac{\sum_{i=1}^4 w_4^{(M)}(i)}{\gamma_4^{(M)}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A3.3.5})$$

This completes the determination of steady-state solutions of probability balance equations for machine M_M .

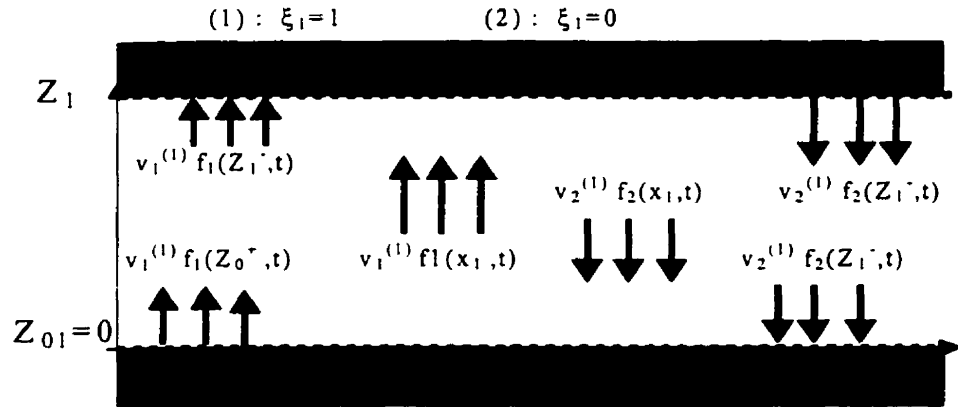


Fig. A3-3: Probability vector field associated with $x_1 \geq 0$

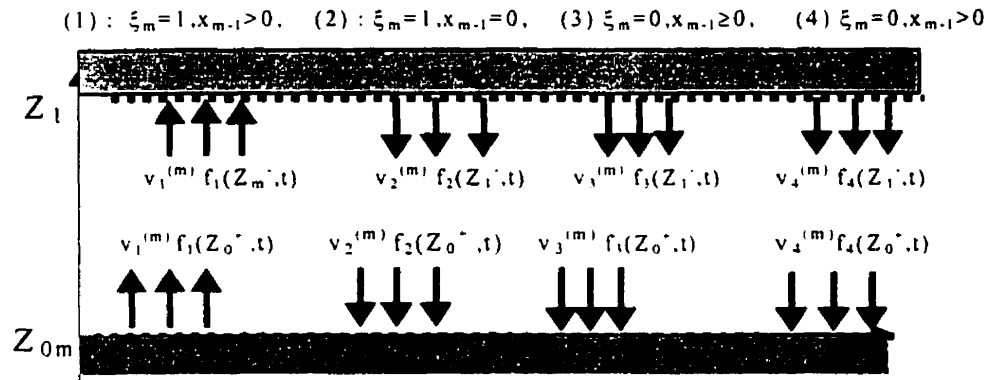


Fig. A3-2: Probability vector field associated with $x_m \geq 0$
 M_m ($m = 2, 3, \dots, M-1$)

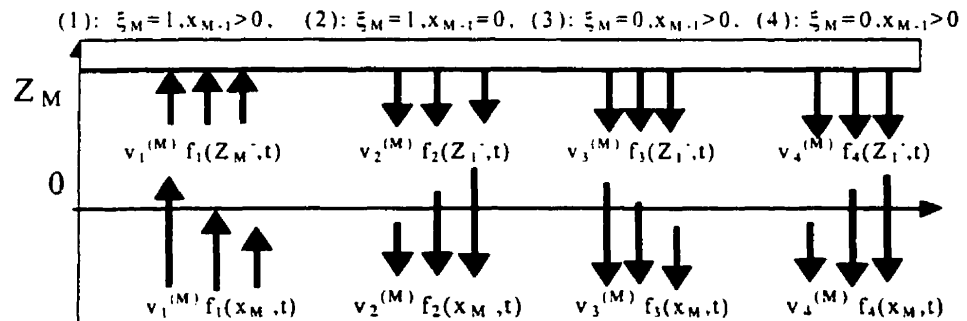


Fig. A3 : Probability vector field for WIP and inventory

Appendix 4

Initialization of the proposed optimization scheme

The aim of this Appendix is to find an optimal parameter vector a_{ag}^* for the initialization of the hierarchical optimization scheme developed in Section 5. For that purpose, we use the exact model of machine M_1 and resort to the two-state aggregated versions of isolated machines M_m ($m=2, \dots, M$). We then compute the overall production cost as well as its first order partial derivatives as an *explicit multivariable nonlinear function* of a_1, a_2, \dots, a_{M-1} . Then, the optimum a_{ag}^* needed is obtained by applying the *necessary condition* for optimality (unconstrained optimization) to the first order Taylor approximation for first order partial derivatives of the overall cost.

Production costs

We approximate the production costs associated with three categories of machines (M_1, M_m ($m=2, 3, \dots, M-2$) and M_M) analyzed in Section 4 as follows:

$$J_1(a_1) = \frac{c_1 k_1}{(r_1 + p_1)(1 - \rho_1)} - \frac{c_1 k_1 (1 - a)}{p_1 (1 - \rho_1)} - (\phi_1 + \psi_1 a) \log_n \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{\pi_1}{(1 - a_1)} \right). \quad (A4.1)$$

$$\tilde{J}_m(a_{m-2}^m) = \frac{c_m k_m}{(R_m(a_{m-2}^{m-1}) + P_m(a_{m-2}^{m-1}))(1 - \rho_m)} - \frac{c_m k_m (1 - a_m)}{P_m(a_{m-2}^{m-1})(1 - \rho_m)} - (\phi_m + \psi_m a_m) \ln \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{\pi_m}{(1 - a_m)} \right) \quad (A4.2)$$

$$\tilde{J}_M^*(a_{M-2}^{M-1}) = c_M^+ \frac{\log \left(\frac{k_M P_M(a_{M-2}^{M-1})(c_M^+ + c_M^-)}{(k_M - d)(P_M(a_{M-2}^{M-1}) + R_M(a_{M-2}^{M-1})) c_M^+} \right)}{\frac{R_M(a_{M-2}^{M-1})}{d} - \frac{P_M(a_{M-2}^{M-1})}{k_M - d}} + \frac{c_M^+ d}{P_M(a_{M-2}^{M-1}) + R_M(a_{M-2}^{M-1})} \quad (A4.3)$$

$$\text{where } \rho_m = \frac{r_m(k_m - d)}{p_m d}, \psi_m = \frac{c_m(r_{m1} + p_m)\rho_m d}{p_m r_m(1 - \rho_m)^2}, \pi_m = \frac{p_m(1 - \rho_m)}{\rho_m(r_m + p_m)} \quad (A4.4)$$

$$\begin{cases} R_m(a_{m-2}^{m-1}) = \frac{r_m(\tilde{r}_{m-1}(a_{m-2}^{m-1}) + (p_m - \tilde{r}_{m-1}(a_{m-2}^{m-1}))a_{m-1})}{p_m + (1 - a_{m-1})r_m} & \text{(repair rate)} \\ P_m(a_{m-2}^{m-1}) = p_m + \tilde{r}_{m-1}(a_{m-2}^{m-1}) \frac{1 - a_{m-1}}{a_{m-1}} & \text{(failure rate)} \end{cases} \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (\text{A4.5})$$

(A4.1) is equivalent to (13), whereas both (A4.2) and (A4.3) arise from a two-state aggregated version of machine M_m ($m=2, 3, \dots$) which is obtained from Fig. 4 by lumping all deficit modes 2, 3, and 4 into a single deficit supermode. Following the reasoning used in Ref. [30], the transition rates obtained for the resulting aggregated two-state machine are given by (A4.5). However (A4.2) results from the fact that an intermediary aggregated two-state machine behaves as a *Hu type of machine* [21] while the two-state aggregated front-end machine behaves as a *Bielecki-Kumar type* [8] of machine.

From (A4.1-A4.4) it is easy to compute the overall cost \tilde{J} by summation, together with its first order partial derivatives. More precisely:

$$\begin{cases} \tilde{J}(a) = J_1(a_1) + \left(\sum_{m=2}^{M-1} \tilde{J}_m(a_{m-2}^m) \right) + \tilde{J}_M(a_{M-2}^{M-1}) \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}(a)}{\partial a_1} &= \frac{d\tilde{J}_1(a_1)}{da_1} + \frac{\partial \tilde{J}_2(a_1^1)}{\partial a_1} + \frac{\partial \tilde{J}_3(a_1^1)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \tilde{J}(a)}{\partial a_i} &= \frac{\partial \tilde{J}_i(a_i^{i+2})}{\partial a_i} + \frac{\partial \tilde{J}_{i+1}(a_{i-1}^{i+1})}{\partial a_i} + \frac{\partial \tilde{J}_{i+2}(a_i^{i+2})}{\partial a_i} \\ \frac{\partial \tilde{J}(a)}{\partial a_{M-1}} &= \frac{\partial \tilde{J}_{M-1}(a_{M-3}^{M-1})}{\partial a_{M-1}} + \frac{\partial \tilde{J}_M(a_{M-2}^{M-1})}{\partial a_{M-1}} \end{aligned} \right. \quad i = 2, 3, \dots, M-2 \end{cases} \quad (\text{A4.5})$$

A first order Taylor approximation of $\frac{\partial \tilde{J}(a)}{\partial a_m}$ ($m=1, 2, \dots, M-1$) in (A4.5) leads to

$$\frac{\partial \tilde{J}(a)}{\partial a_m} \approx \frac{\partial \tilde{J}(a)}{\partial a_m} \Big|_{\hat{a}} + \frac{\partial^2 \tilde{J}(a)}{\partial^2 a_m} \Big|_{\hat{a}} (a_m - \hat{a}) + o((a_m - a_m^0)^2) \quad \text{for } m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (\text{A4.6})$$

Subsequently, using (A4.5) in (A4.6) and solving $\frac{\partial \tilde{J}(a)}{\partial a_m} = 0$ for all a_m ($m=1, 2, \dots, M-1$),

it is easy to see that the optimum $\hat{a}^* = (\hat{a}_1^* \hat{a}_2^* \dots \hat{a}_{M-1}^*)$ satisfies (24).

References

- [1] R. Akella and P. R. Kumar, "Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31, 116-126, 1986.
- [2] P. Algoet, "Flow balance equation for steady state distribution of a flexible manufacturing system," *IEEE Transaction on Automatic Control*, 34 (8), 917-921, 1989.
- [3] A. Arapostathis, V. S. Borkar, E. F. Gaucherand, M. K. Ghosh and S. I. Markus, "Discrete-time Controlled Markov Processes with average cost criterion: A survey", *Siam Journal on Control and Optimization*, 31 (2), 282-344, 1993.
- [4] S. X. Bai and S. B. Gershwin, "Scheduling manufacturing systems wirth work-in-process inventory control: single-part-type systems," *IIE Transactions*, 27, 599-617, 1995.
- [5] S. X. Bai and S. B. Gershwin, "Scheduling manufacturing systems with work-in-process inventory control: multiple part-type systems," *International Journal of Production Research*, vol. 32 (2), 365-385, 1995.
- [6] D. Beyer and S. P. Sethi, "Average cost optimality in inventory models with Markovian demands", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 92 (3), 497-526, 1997.
- [7] D. Beyer, S. P. Sethi and Taksar, "Inventory models with Markovian demands and cost functions of polynomial growth", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 98 (2), 281-323, 1998.

- [8] T. Bielecki and P. R. Kumar, "Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing Systems," *Operations Research*, 36 (4), 532-541, 1988.
- [9] A. M. Bonvik, C. E. Couch and S. B. Gershwin, "A comparison of production line control mechanisms", *International Journal of Production Res.*, 35 (3), 789-804, 1997.
- [10] M. Camaranis and Liberopoulos, "Perturbation analysis for the design of flexible manufacturing systems flow controllers", *Operations Research*, 40 (6), 1107-1125, 1992.
- [11] M. Caramanis and A. Sharifnia, "Near-Optimal Manufacturing Flow Controller Design", *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 3, 321-336, 1991.
- [12] J. Chen and G. Steiner, "Approximate methods for discrete lot streaming in flow shops", *Operations Research Letters*, 21, 139-145, 1997.
- [13] CONDOR, "Operations Research: The next decade", *Operations research*, 36 (4), 619-637, 1988
- [14] C. Dupont-Gathermand, "A survey of flexible manufacturing systems," *Journal of Manufacturing System*, 1 (1), 1-41, 1984.
- [15] S. El-Férík and R. P. Malhamé, "Padé approximants for the transient optimization of hedging control policies in manufacturing," *IEEE Transactions Automatic Control*, 42 (4), 440-457, 1997.
- [16] N. T. Fong and X. Y. Zhou, "Hierarchical production policies in stochastic two-machine flowshop with finite buffers," *Journal of Optimization theory and Applications*, 89 (3), 681-712, 1996.

- [17] S. B. Gershwin, "Design and operation of manufacturing systems - Control and systems: Theoretical models and issues", *Automatic Control conference*, Albuquerque, New Mexico, 1909-1913, June 1997.
- [18] S. B. Gershwin, *Manufacturing systems engineering*, Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall, 265-354, 1994.
- [19] S. B. Gershwin, R. Akella and Y. F. Choong, "Short term production scheduling of an automated manufacturing facility," *IBM Journal of Research & Develop.*, 29 (4), 392-400, 1985.
- [20] P. Glasserman, "Hedging point production control with multiple failure modes," *IEEE Transactions Automatic Control*, 40 (4), 707-712, 1995.
- [21] J. Q. Hu, "Production control for failure-prone production systems with no backlog permitted," *IEEE Transactions Automatic Control*, 40 (2), 299-295, 1995.
- [22] J. Q. Hu, "A decomposition approach to flow control in tandem production Systems," *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, LA, pp. 3140-3143, 1995.
- [23] J. Q. Hu, P. Valiki and G. X. Yu (1994), "Optimality of hedging point policies in the production control of failure prone manufacturing systems," *IEEE Transactions Automatic Control*, 39 (9), 1875-1879, 1994.
- [24] J. Kimemia and S. B Gershwin, "An algorithm for the computer control of flexible manufacturing system", *IEE Transactions*, 15 (4), 353-362.

- [25] S. X. C. Lou and P. W. Kager, "A robust production control policy for VLSI wafer fabrication", *Semiconductor Manufacturing*, 2 (4), 159-164, 1989.
- [26] R. P. Malhamé, "Ergodicity of hedging point policies in single-part multiple-state manufacturing systems," *IEEE Transactions Automatic Control*, 38 (2), 340-343, 1993.
- [27] R. P. Malhamé and E. K. Boukas, "A renewal theoretic analysis of a class of manufacturing system," *IEEE Transactions Automatic Control*, 36 (5), 580-587, 1991.
- [28] M. D. Mascolo, Y. Frein and Y. Dallery, "An analytical method for performance evaluation of kanban controlled production systems", *Operations Research*, 44 (1) 50-64, 1996.
- [29] J. Mbihi and R. P. Malhamé, "Optimization of a class of decentralized hedging production policies in an unreliable two-machine flow shop", presented at the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Florida, Dec. 1998.
- [30] J. Mbihi and R. P. Malhamé, "Optimization of a class of decentralized hedging production policies in a stochastic two-machine flow shop", submitted for publication in *IEE Transactions on Scheduling and Logistics*.
- [31] E. Presman, S. Sethi and Q. Zhang, "Optimal feedback production in a stochastic N-machine flow shop," *Automatica*, 31 (9), 1325-1332, 1995.
- [32] C. Samaratunga, S. X. C. Lou, S. P. Sethi and X. Y. Zhou, "Computational evaluation of hierarchical production control policies , for stochastic manufacturing systems," *Operations Research*, 45 (2), 258-274, 1997.

- [33] S. P. Sethi and Q. Zhang, *Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing System*, Birkhauser, 1994.
- [34] S. P. Sethi, Q. Zhang and X. Y. Zhou, "Hierarchical controls in Stochastic manufacturing systems with convex costs", *Journal of Optimization Theory and Applications*, . 80 (2), 299-317, 1994
- [35] S. P. Sethi, H. Yan, Q. Zhang and X. Y. Zhou, "Feedback production planning in a stochastic two machine flow shop: Asymptotic analysis and computational results". *International Journal of Product. Econ.*, 30-31, 79-93, 1993.
- [36] S. P. Sethi, and X. Y. Zhou, "Stochastic dynamic job shops and hierarchical production planning," *IEEE Transactions Automatic Control*, 39 (10), 2061-2076, 1994.
- [37] A. Sharifnia, "Production control of a manufacturing system with multiple machine states," *IEEE Transactions Automatic Control* 33, 620-625, 1988.
- [38] D. P. Song, Y. X. Sun and W. Xing, "Optimal control of a stochastic assembly production line", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98 (3), 681-700, 1998.
- [39] J. N. Tsitsiklis, "Convexity and characterization of optimal policies in a dynamic routing problem", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 44 (1), 101-135, 1984.
- [40] G. Van Ryzin, S. X. C. Lou and S. B. Gershwin, "Production control for a tandem two-machine system," *IIE Transactions* 5, 5-20, 1993.

- [41] R. J. Wittrock, "Scheduling algorithms for flexible flow lines", *IBM Journal of Research & Develop.*, 29 (4), 401-412, 1985.
- [42] H. Yan, G. Yin and S. X. C. Lou, "Using stochastic optimization to determine threshold values for the control of unreliable manufacturing systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, 83, 511-539, 1994.